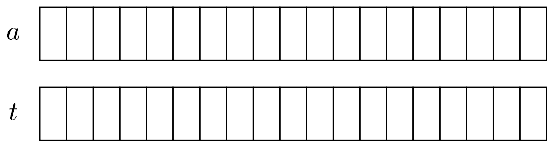
Petite épreuve d'informatique

Ecole polytechnique

Avertissement On attachera une grande importance à la clarté, à la précision, à la concision de la rédaction. On précisera aussi le langage de programmation utilisé. L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisé** pour cette épreuve.

Un capteur mesure pendant plusieurs années le rayonnement gamma émis par un lointain pulsar. Pour chaque gamma reçu, repéré par son rang i ($0 \leq i < n$), on mesure son énergie a_i et l'instant t_i de sa détection. L'unité d'énergie est le kilo électron-volt (keV), l'unité de temps est le dixième de seconde (1/10s), l'origine des temps correspond au début de la campagne de mesures. On supposera $n > 0$. Pour tout i, la quantité a_i est un entier naturel ($a_i \in \mathbf{N}$). Les valeurs a_i sont rangées dans un tableau a de n éléments. Ces mesures n'ont pas lieu à intervalles réguliers. On note la date t_i en 1/10s ($t_i \in \mathbf{N}$) de la mesure a_i dans un autre tableau t de n éléments. Pour tout i et j tels que $0 \leq i < j < n$, on a donc $t_i < t_j$.



Le temps d'exécution $T(f)$ d'une fonction f de la variable a est le nombre d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division, affectation, etc) nécessaires au calcul de $f(a)$. Lorsque ce temps d'exécution dépend d'un paramètre n, il sera noté $T_n(f)$. On dit que la fonction f s'exécute :

- en temps linéaire en n, s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $T_n(f) \leq Kn$;
- en temps quadratique en n, s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $T_n(f) \leq Kn^2$.

Question 1 Ecrire une fonction `compte(x, a)` qui retourne, en temps linéaire, le nombre de fois où la valeur x apparaît dans le tableau a.

Question 2 En déduire une fonction `occurences(a)` qui retourne, en temps quadratique, un tableau r tel que pour tout i ($0 \leq i < n$), l'élément r_i est le nombre de fois où a_i apparaît dans a.

Partie I

On cherche à calculer les périodes T de temps pendant lesquelles le rayonnement reste constant.

$$T = t_j - t_i \quad \text{avec} \quad a_i = a_k = a_j \quad \text{pour tout } k \text{ tel que } i \leq k \leq j$$

Question 3 Ecrire une fonction `maxconstant(a)` qui retourne, en temps linéaire, la période la plus grande T pendant laquelle le rayonnement reste constant.

Partie II

Soit `occ` le tableau calculé à la question 2.

Question 4 Ecrire une fonction `maxoccurences(a, occ)` qui imprime, en temps linéaire, les indices i_1 et i_2 des deux rayonnements m_1 et m_2 qui apparaissent le plus grand nombre de fois dans le tableau de mesures a. (Si le tableau a contient des valeurs toutes identiques, on posera $i_2 = m_2 = -1$).

On veut maintenant réorganiser les tableaux de mesures a et de dates t pour mettre en tête toutes les mesures donnant m_1, puis celles valant m_2, puis toutes les autres.

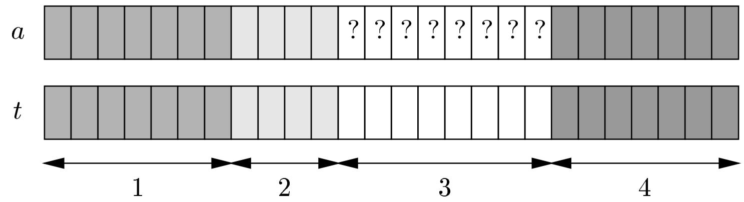
La réorganisation des tableaux a et t demandée est donc telle que

$$\begin{array}{lcl} 0 \le k < b & \Rightarrow & a_k = m_1 \\ b \le k < r & \Rightarrow & a_k = m_2 \\ r \le k < n & \Rightarrow & a_k \notin \{m_1, m_2\} \end{array}$$

Après réorganisation, le tableau t vérifie toujours que t_i est la date à laquelle s'est produit le rayonnement a_i $(0 \le i < n)$.

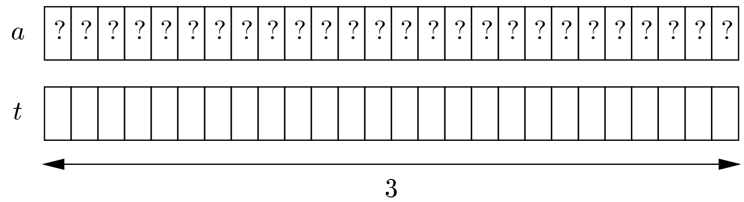
Question 5 Ecrire une fonction trier(a, t, m_1, m_2) qui réordonne, en temps linéaire, les tableaux a et t pour regrouper en tête les deux mesures les plus fréquentes, comme indiqué précédemment.

Indication : on parcourera les tableaux a et t (dans le sens des indices croissants) en maintenant une décomposition de la forme suivante

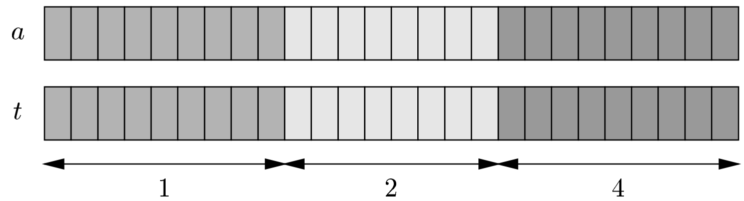


avec a_i valant respectivement m_1, m_2 et une valeur non prise dans $\{m_1, m_2\}$ dans les zones 1, 2 et 4.

Au début les tableaux a et t sont de la forme :



A la fin les mêmes tableaux a et t sont de la forme :



Question 6 La fonction précédente garde-t-elle la croissance des dates à l'intérieur de chaque zone, c'est-à-dire que $i < j$ implique $t_i < t_j$ pour i et j dans une même zone ?