Formule de STIRLING

Le but de ce TD est de démontrer la formule de STIRLING :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Dans les parties I et II, on détermine la forme générale d'un équivalent (càd, à une constante près). Dans le III, on précise la valeur de cette constante.

Partie I *Utilisation du procédé de comparaison avec une intégrale*

C'est dans cette partie que l'on utilise les résultats sur les séries. Selon les notations du cours, on pose

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \ln t \, \mathrm{d}t - \ln n$$

pour $n \geq 2$.

1. Vérifier que $\sum_{k=2}^{n} w_k = n \ln n - n + 1 - \ln n!$
2. Démontrer que $w_n = -\int_{n-1}^{n} (t - n + 1) \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$ [IPP].
3. En déduire que $w_n = -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2} \frac{1}{t}\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ [IPP à nouveau [1]].
4. On note I_n le terme "non intégré" de l'IPP précédente : $I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$. À l'aide d'une simple majoration, montrer que $\sum_{n \geq 2} I_n$ CV.
   [*Question subsidiaire* : pourquoi tant de précautions ? Ne suffisait-il pas d'appliquer l'étude faite en cours ?]
5. En déduire que $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + A + o(1)$ $[n \to \infty]$, où A est une constante que l'on explicitera en fonction de la somme totale $\sum_{k=2}^{\infty} I_k$ et de la constante γ d'EULER.
6. En déduire enfin que $n!$ a un équivalent de la forme $\lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie II *Utilisation d'une série auxiliaire*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \; ; \; y_n = \ln u_n \; ; \; z_n = y_{n+1} - y_n.$$

1. Démontrer que l'on peut écrire :
$$z_n = 1 - \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right).$$
2. En déduire
   (a) un équivalent de z_n ;
   (b) la convergence de la série $\sum z_n$.
3. En déduire que (y_n) est convergente, puis que (x_n) est convergente vers une limite $\lambda > 0$. Conclure.

Partie III *Détermination de la constante* λ

Le calcul de λ n'a rien d'une étude de séries. On l'effectue grâce à la *deuxième formule de* WALLIS :

$$\lim \frac{2^{4n}(n!)^4}{n.((2n)!)^2} = \pi.$$

elle-même déduite de l'étude des intégrales du même nom ([2]).

En admettant cette formule, et en y injectant l'équivalent obtenu en I.6. ou en II.3., déterminer la valeur exacte de λ et conclure.

1. Vous pourriez aussi effectuer une unique IPPG d'ordre 2.
2. Voir exercices de sup.