PC - exercices de mathématiques

Séries

Les séries étudiées sont notées $\sum u_n$. s_n (*resp.* r_n) est la somme partielle (*resp.* le reste) d'indice n.

1 Notion de série convergente

Exercice 1.1

Étudier la convergence de $\sum u_n$, où $u_n = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ ($z \in \mathbb{C}$).

Exercice 1.2

Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 1.3

Représenter graphiquement le domaine de CV de $\sum u_n$ en (x, y), où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^x+(-1)^n n^y}$ (distinguer SCV et CVA).

2 Séries de réels positifs

Exercice 2.1

Étudier la convergence de $\sum u_n$:

1. $u_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;
2. $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}}$;
3. $u_n = \frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$) ;

Exercice 2.2

Existence et calcul de la somme :

1. $u_n = \frac{1}{n^3-n}$ ($n \geq 2$) ;
2. $u_n = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Exercice 2.3

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge.

1. Démontrer que si $n < p$,
$$\frac{u_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{u_{p+1}}{r_p} \geq 1 - \frac{r_{p+1}}{r_n}$$
et en déduire que $\sum \frac{u_{n+1}}{r_n}$ diverge.
2. Démontrer que
$$\frac{u_{n+1}}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$$
et en déduire que $\sum \frac{u_{n+1}}{\sqrt{r_n}}$ converge.

Exercice 2.4 $\sum \frac{1}{p}$ *diverge* [1]

On fixe un entier $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\{p_1, \ldots, p_K\}$ l'ensemble des diviseurs premiers des entiers compris entre 1 et N.

1. Rappeler pourquoi, si $i \in [\![1, K]\!]$, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^m}$ existe et vaut $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$.
2. Justifier que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \prod_{i=1}^{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^m} = \prod_{i=1}^{K} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}.$$
3. Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$ et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \exp\left(2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}\right).$$
4. Conclure : qu'a-t-on démontré ? Qu'en résulte-t-il pour "l'abondance" des nombre premiers parmi les entiers ?

Exercice 2.5

Soit (u_n) une suite décroissante de réels ≥ 0.

1. Si $\sum u_n$ CV, alors $(u_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Réciproque ?
2. Nécessité des hypothèses ?

3 Utilisation de DL (et du CSA)

Exercice 3.1

Étudier la convergence de $\sum u_n$:

1. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;
2. $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} e^{-\sqrt{n^2+n}}$;
3. $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+p)^\alpha}$ ($\alpha > 1$) ;
4. $u_n = n^\alpha \left[e^{-a/n} - e^{-a \sin 1/n}\right]$ ($a > 0$).

Exercice 3.2

Même exercice

1. $u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) ;
2. $u_n = (-1)^n e^{-\sqrt{\ln n}}$.

1. D'après W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill 1964.

Exercice 3.3

Étudier $\sum u_n$ à l'aide de développements limités.

1. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$;
2. $u_n - (1-\operatorname{th} n)^{\operatorname{th}\frac{1}{n}} - \ell$;
3. $u_n = \sin \pi\sqrt{n^2+2n+2}$;
4. $u_n = \tan \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1-t^2}}$;
5. $u_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{(\ln t)^\alpha}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$;
6. $u_n = \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;
7. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)^n - \ell$;
8. $u_n = \left[\cos\left(a+\frac{1}{n}\right) - \cos a\right]^n - \ell$;
9. $u_n = \left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
10. $u_n = \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$;
11. $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3.4

$u_n = \sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) - \alpha - \frac{\beta}{n}$: nature de $\sum u_n$ selon α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.5

Nature de $\sum u_n$ selon $\alpha \in \mathbb{R}$, où

$$u_n = \sin^2\left(\alpha + \operatorname{sh}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\right).$$

Exercice 3.6 *critère de* DUHAMEL

$u_n > 0$, $\sum v_n$ CVA et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n.$$

1. Démontrer que pour n assez grand,
$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n$$
où $\sum w_n$ CVA.
2. En déduire l'existence de $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.
4. Nature de $\sum \frac{n^n}{e^n n!}$?

Exercice 3.7

$u_n = \prod_{k=2}^n (2 - \mathrm{e}^{1/k})$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. Étudier la série $\sum u_n$.

Exercice 3.8 *produits infinis*

Étudier la suite $(\prod_{k=1}^n u_k)$ où

1. $u_n = 1 + k^{2^n}$ (et préciser la limite) ;
2. $u_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;
3. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$.

4 Comparaison avec une intégrale

Exercice 4.1

Existence et calcul de la somme :

1. $u_n = \frac{\cos^2 nx}{n!}$;
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$;
3. $u_n = \frac{1}{n!}\int_1^{\sqrt{3}} (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

5 u_n non explicité

Exercice 5.1

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

1. Démontrer que $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.
2. Démontrer que $\sum_{p=0}^n \frac{1}{u_p} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 5.2

Soit $u_0 = 0$ et $u_n = \sqrt{\frac{1+u_{n-1}}{2}}$:

1. Déterminer la limite ℓ de (u_n).
2. Étudier $\sum (u_n - \ell)$.

Exercice 5.3

$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}u_n^2$; même exercice.

Exercice 5.4

$u_0 \in \mathbb{R}_+$; $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.
Nature de $\sum \frac{1}{u_n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$? [Commencer par $u_0 = 0$.]