PC - exercices de mathématiques

Espaces vectoriels normés

1 Distances et normes

Exercice 1.1

Montrer que $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$. Est-elle équivalente à la distance usuelle ? Déterminer $\mathcal{B}_d(a\,;\,r)$ en fonction de a et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.2

E est un $\mathbb{K}$-evn. Démontrer l'unicité du centre et du rayon d'une boule ouverte, càd

$$\mathcal{B}(a,r) = \mathcal{B}(a',r') \Rightarrow a = a' \text{ et } r = r'$$

pour tous $a, a' \in E$, $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.
[On pourra p. ex. supposer $r \leq r'$.]
Comparer avec l'ex. 1.1.

Exercice 1.3

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$-evn E. On pose $N = N_1 + N_2$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que : $N_1 \sim N_2 \Rightarrow N \sim N_1$ ($\sim N_2$).
   Étudier la réciproque.

Exercice 1.4

N_1 et N_2 étant deux normes sur le $\mathbb{K}$-ev E, montrer que $N_1 \sim N_2$ *ssi* on a, pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$(x_n) \to 0_E \text{ dans } (E, N_1) \Leftrightarrow (x_n) \to 0_E \text{ dans } (E, N_2).$$

Exercice 1.5

$E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ est muni des normes définies par $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$, $\|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f|$, $\|f\|_2 = \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2}$. Étudier leurs équivalences.

Exercice 1.6

$E = \mathbb{R}^2$. Si $(x_1, x_2) \in E$, on pose :

$$\begin{aligned} N_1(x_1,x_2) &= \sup_{t\in[0,1]} |tx_1 + x_2|\ ; \\ N_2(x_1,x_2) &= \sup_{t\in[-1,1]} |tx_1 + x_2|. \end{aligned}$$

1. Montrer que N_1 est une norme. On démontrerait de même que N_2 est une norme ; ce n'est pas demandé.
2. Pourquoi N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ? Déterminer les "meilleures" constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$ (càd : α maximal, β minimal).

Exercice 1.7

$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{[0,1]} |f|$ et de

$$N : f \mapsto \|f'\|_\infty = \sup_{[0,1]} \|f'\|.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1.8

E est le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées. On munit E de $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et

$$N(u) = |u_0| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

si $u = (u_n)$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1.9

Sur $E = \mathbb{K}[X]$ on définit, si $P = \sum a_k X^k \in E$:

$$N_\infty(P) = \max_k |a_k| \text{ et } N_1(P) = \sum_k \frac{|a_k|}{k+1}.$$

1. N_∞ est notoirement une norme sur E. Montrer qu'il en est de même pour N_1.
2. Montrer qu'aucune des deux normes N_∞ et N_1 n'est *plus fine* que l'autre, càd qu'il n'existe aucune constante α (*resp.* β) telle que $N_1 \leq \alpha N_\infty$ (*resp.* $N_\infty \leq \beta N_1$).

Exercice 1.10

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur E telle que, pour toutes matrices A et B : $\|AB\| = \|BA\|$.
2. Il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur E telle que deux matrices semblables aient toujours la même norme.

Exercice 1.11

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid \det M \neq 0\}$ est un *ouvert* de E.
2. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in E \mid {}^tMM = I_n\right\}$ est un *compact* de E.

Exercice 1.12

E est un $\mathbb{K}$-evn ; (u_n) est une suite de vecteurs de E qui converge vers un vecteur ℓ. Montrer que l'ensemble

$$F = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est un *fermé* de E.
[On reviendra aux définitions de "$\ell = \lim (u_n)$" et de "$\complement_E F$ est ouvert".]

Exercice 1.13

Soient Q et R deux polynômes *distincts*. On définit une application f *continue* sur $[-2,2]$, coïncidant avec Q (*resp.* avec R) sur $[-2,-1]$ (*resp.* $[1,2]$). [Faire un schéma.]

1. (5/2) Pourquoi existe-t-il une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim \left(\|f - P_n\|_{\infty,[-2,2]}\right) = 0$?
2. Que peut-on dire de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) pour $N_1 = \|\cdot\|_{\infty,[-2,-1]}$?
   (b) pour $N_2 = \|\cdot\|_{\infty,[1,2]}$?

   Qu'en résulte-t-il pour ces deux normes ?
3. Qu'en résulte-t-il enfin pour la suite $(\deg (P_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

2 Continuité dans les evn

Exercice 2.1

E est un $\mathbb{K}$-evn, $\varphi \in E^* = L_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$ est une *forme linéaire* sur E et $H = \ker \varphi$ (*hyperplan* de E). Démontrer l'équivalence

$$H \text{ fermé} \iff \varphi \text{ continue.}$$

Exercice 2.2

E, F evn. $f : E \to F$ vérifie

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ (^1)$$

pour tous $x, y \in E$.
Montrer que si f est continue en 0_E, elle est linéaire.

Exercice 2.3

E, F : $\mathbb{K}$-evn. $f \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$ est telle que : pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0_E, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que f est continue. Réciproque ?
Comparer avec le cas d'une application quelconque (non linéaire).

Exercice 2.4

$E = \mathbb{K}[X]$ est muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P|$. F est le sev $\{P \in E \mid P(0) = 0\}$, muni de la norme induite. On définit $T : E \to F; P \mapsto Q$ où $Q(x) = \int_0^x P$ pour tout x.

1. Montrer que T est un isomorphisme de E sur F. Quelle est sa réciproque ?
2. Montrer que T est continu pour $\|\cdot\|_\infty$.
3. T^{-1} est-il continue pour cette même norme ?

1. f est *additive*.

Exercice 2.5

E est un $\mathbb{K}$-evn. f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

1. Calculer $f \circ g^p - g^p \circ f$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Est-il possible que f et g soient continus ?
3. Que peut-on dire de plus lorsque E est de dimension finie ?

Exercice 2.6

Sur $E = \mathbb{C}[X]$, on définit les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ par : si $P = \sum a_k X^k$, $\|P\|_1 = \sum |a_k|$ et $\|P\|_2 = \sup_{[-1,1]} |P|$.

1. Étudier l'équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
2. Étudier la continuité de $P \mapsto \sum a_k$ pour chacune des deux normes précédentes.
3. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit la forme linéaire *valeur en a*, $\mathcal{V}_a$, par $\mathcal{V}_a(P) = P(a)$. Étudier selon a la continuité de $\mathcal{V}_a$ pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Expliciter le cas échéant une constante k_i telle que $|\mathcal{V}_a(P)| \leq k_i \|P\|_i$ pour tout P ($i = 1, 2$).

Exercice 2.7

$E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est muni de la forme bilinéaire

$$\varphi : (f,g) \mapsto \int_{[a,b]} fg.$$

Étudier la continuité de φ
(a) pour la norme $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{[a,b]} |f|$;
(b) pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2}$.

Dans chaque cas, expliciter une majoration prouvant la continuité.