PC - mathématiques

Suites et séries

Les suites et séries considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles ou complexes.

1 Vitesse de convergence

Soit $a \in \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour calculer une valeur approchée de a, on utilise une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 1. On dit que la convergence de la suite (u_n) est ***d'ordre*** $\boldsymbol{\alpha}$, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - a| \leq k\,|u_n - a|^{\alpha}. \tag{1}$$

1.1 Convergence géométrique

Si $\boldsymbol{\alpha = 1}$, on dit que la convergence de (u_n) vers a est ***linéaire*** ou ***géométrique*** ; la relation (1) s'itère alors en $|u_n - a| \leq k^n\,|u_0 - a|$. Ceci n'a bien sûr d'intérêt que lorsque $k < 1$. Intuitivement, cela signifie que *chaque étape $u_n \rightsquigarrow u_{n+1}$ ajoute le même nombre de décimales correctes à u_n.*

Exemple 2. La *méthode du point fixe*[1] consiste à itérer une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour calculer une valeur approchée d'un point fixe ξ de f ($f(\xi) = \xi$). Si f est *contractante*[2], la CV de (u_n) vers ξ est géométrique.

1.2 Convergence quadratique

Si $\boldsymbol{\alpha = 2}$, on dit que la convergence de (u_n) vers a est ***quadratique***. (1) donne alors $|u_n - a| \leq \frac{1}{k}\left(k\,|u_0 - a|\right)^{2^n}$. *A priori* c'est sans intérêt si $k\,|u_0 - a| \geq 1$. Mais comme la CV de (u_n) vers a est supposée, la condition $k\,|u_{n_0} - a| < 1$ survient pour n_0 assez grand. On peut alors exploiter la majoration précédente à partir du rang n_0 (plutôt que 0). Intuitivement, une CV quadratique signifie que *le nombre de décimales correctes de u_n double à chaque itération.*

Exemple 3. La *méthode de* NEWTON[1] pour résoudre de manière approchée une équation "$f(x) = 0$" consiste à itérer la relation $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, à condition que f vérifie des hypothèses convenables. Dans les cas favorables, (u_n) CV quadratiquement vers un zéro ξ de f.

Actuellement, le meilleur algorithme[3] d'approximation connu pour π est d'ordre 9.

1. *Cf.* le chapitre "Approximation".
2. Càd, k-lipschitzienne avec $k < 1$.
3. Il s'agit bien d'un *algorithme*, qui utilise plusieurs suite récurrentes et non une seule (J. et P. BORWEIN, 1987).

2 Séries réelles ou complexes

2.1 Notion de série

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On lui associe $(s_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k. \tag{2}$$

On peut revenir[4] de (s_n) à (u_n) via :

$$u_0 = s_0\,;\ u_n = s_n - s_{n-1} \text{ pour } n \geq 1. \tag{3}$$

On conservera ces notations dans toute la suite.

Définition 4. On dit que *"**la série de terme général** $\boldsymbol{(u_n)}$ **converge**"* si la suite (s_n) converge vers une limite s, appelée *somme* de la série.

Définition 5. s_n (*resp.* $r_n = s - s_n$) est la ***somme partielle*** (*resp.* le ***reste***) d'indice n de la série.

Notation 6. On écrit "$\sum u_n$ converge[5]", et on note :

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,;\ r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que "la série de terme général (u_n) ***diverge***".

Remarque 7. Le reste r_n d'indice n n'est défini que dans le cas d'une série convergente, et alors, puisque $r_n = s - s_n$ on a : $\lim r_n = 0$.

Remarque 8. On peut, selon (3), formuler en termes de séries toute CV de suite : (x_n) CV $\Leftrightarrow \sum (x_n - x_{n-1})$ CV.

Exemple 9. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ CV (se prouve en écrivant simplement $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$) ;

Exemple 10. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (en constatant que (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes) (***série harmonique alternée***, *cf.* ex. 17 et déf. 18) ;

Exemple 11. $\sum a^n$ CV *ssi* $|a| < 1$, dans ce cas on peut préciser la somme $s = \frac{1}{1-a}$ (***série géométrique***).

Il résulte facilement des propriétés des limites de *suites* :

Proposition 12. *L'ensemble $\mathcal{S} = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ CV}\right\}$ est un $\mathbb{K}$-ev (sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), et l'application "somme" :*

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{K} \\ (u_n) & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} u_k \end{array}\right.$$

est une forme linéaire *sur $\mathcal{S}$.*

4. Plus formellement, $S : (u_n) \mapsto (s_n)$ et $T : (s_n) \mapsto (u_n)$ sont deux automorphismes réciproques du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
5. Attention, la notation "$\sum u_n$" n'a de sens *que* dans ce contexte ; elle sert à préciser que l'on s'intéresse à la suite (s_n) (et non (u_n)).

En outre, on peut toujours se ramener à l'étude de séries de réels :

Remarque 13. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a trivialement

$$\sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum \Re u_n \text{ CV et } \sum \Im u_n \text{ CV.}$$

Attention ! Le produit (au sens usuel) de deux séries convergentes peut diverger !

Exemple 14. $(u_n) = (v_n) = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, *cf.* ex. 17, 21 et déf. 47.

Le résultat suivant fournit une condition *nécessaire* grossière de CV :

Proposition 15. ***Si*** *$\sum u_n$ CV,* ***alors*** *(u_n) CV vers 0.*

Si cette dernière condition n'est pas remplie, on dit que $\sum u_n$ DV *grossièrement.*

Attention ! La réciproque de la prop. 15 est *fausse !*

Exemple 16. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Exemple 17. $u_n = \frac{1}{n}$. La série (divergente) $\sum \frac{1}{n}$ est appelée ***série harmonique***, *cf.* ex. 31.

2.2 Séries alternées

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 18. La série $\sum u_n$ est dite ***alternée*** si $\left((-1)^n u_n\right)$ est décroissante et positive.

Dans ce cas très particulier, la prop. 15 devient une équivalence :

Théorème 19 (critère des séries alternées, ou de Leibniz). *Si $\sum u_n$ est alternée, $\sum u_n$ CV* ssi *(u_n) admet pour limite 0. De plus, pour tout n : $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.*

Remarque 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de r_n est donc *le même* que celui de u_{n+1} .

Exemple 21. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, et plus généralement $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sont CV en tant que séries alternées.

Attention à la nécessité des hypothèses !

Exemple 22. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$; *cf.* aussi. ex. 46.

3 Séries de réels positifs

On envisage dans cette partie des séries $\sum u_n$ de *réels positifs* [6].

Sous cette hypothèse, (s_n) est croissante donc on déduit du th. "de la limite monotone" que $\sum u_n$ CV *ssi* ses sommes partielles sont *majorées*. On en déduit :

Proposition 23 (comparaison). *Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, et si $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ CV.*

Exemple 24. $\sum \frac{1}{n^2}$ CV.

Plus généralement, si $(u_n) = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ CV, il en est de même de $\sum u_n$.

Le critère suivant permet une étude plus fine :

6. Il suffit bien sûr que leur signe soit *constant*.

Proposition 25 (équivalence). *Si $(u_n) \sim (v_n)$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exemple 26. $\sum \ln \cos \frac{1}{n}$ CV.

Attention ! Cette prop. 25 *ne s'applique pas* aux séries de signes quelconques, *cf.* ex. 46.

Le th. suivant, appelé *critère de comparaison des sommes partielles et des restes*, précise le résultat de la prop. 25 :

Théorème 27. *Soient deux suites (u_n), $(u'_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $(u_n) \sim (u'_n)$.*

- *si $\sum u_n$ CV, $(r_n) \sim (r'_n)$;*
- *si $\sum u_n$ DV, $(s_n) \sim (s'_n)$.*

L'application fructueuse de ces théorèmes nécessite le maximum de séries "de référence" au statut (CV ou DV) bien connu.

Le lemme suivant (*critère de condensation* de Cauchy) nous en fournit plusieurs.

Lemme 28. *Soit (u_n) une suite* ***décroissante*** *de réels* ***positifs****. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.*

Pour ce type de séries, la convergence est donc déterminée par un "petit [7] nombre" de termes.

Séries de référence

- **Séries de Riemann :**

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Ce résultat prend en compte les exemples 17 et 24.

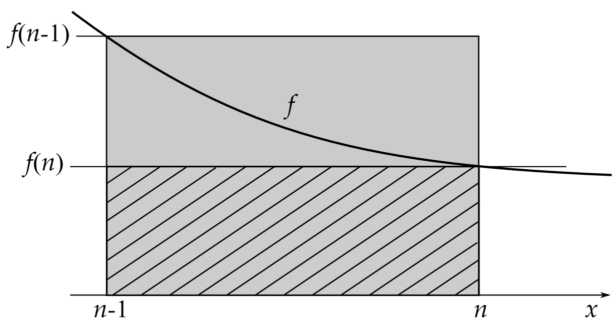
- **Séries de Bertrand :**

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ CV} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) >_{\text{lex.}} (1, 1) .$$

4 Comparaison avec une intégrale

On considère une application $f : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux* [8], *décroissante, à valeurs positives* [9] sur un intervalle I contenant $[n_0, +\infty[$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

On note $F = \int f$ une primitive de f sur I. F est donc une application croissante de I dans $\mathbb{R}$.



On peut donc exploiter pour $n > n_0$ l'encadrement :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n-1) \tag{4}$$

dont on déduit successivement :

7. L'ensemble $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ayant une *densité limite* nulle !
8. *Cf.* le chapitre "Dérivation et intégration".
9. L'essentiel est que f soit *de signe constant*.

Lemme 29. *On pose (pour $n \geq n_0$) :*

$$\delta_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f.$$

La suite (δ_n) est décroissante et CV vers une limite $\ell \geq 0$.

Le lemme 29 permet d'écrire $\delta_n = \ell + o(1)$ soit

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) &= \textstyle\int_{n_0}^{n} f + \ell + o(1) \\ &= F(n) - F(n_0) + \ell + o(1)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

On peut énoncer autrement le résultat du lemme 29 : si pour $n > n_0$ on pose

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\, \mathrm{d}t,$$

alors (pour $n > n_0$) :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=n_0+1}^{n} w_k &= \int_{n_0}^{n} f - \textstyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \\ &= f(n_0) - \delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(n_0) - \ell, \end{aligned}$$

autrement dit :

Lemme 30. *La série $\sum_{n>n_0} w_n$ converge.*

Exemple 31. En prenant $n_0 = 1$ et en posant $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\delta_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

La limite de (δ_n) est la ***constante d'*EULER**, notée γ ([10]).

On déduit également du lemme 29. en posant cette fois $n_0 = 1$ et $f = \ln$ ([11]) la bien connue *formule de* STIRLING donnant un équivalent de $n!$:

Théorème 32. *Lorsque $n \to \infty$,*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Cet équivalent n'est que le premier terme d'un développement asymptotique [12].

Le procédé de comparaison série-intégrale trouve une autre application importante dans la convergence des *intégrales généralisées* [13].

5 Convergence absolue

$\mathbb{K}$ désigne de nouveau $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La notation suivante est réservée aux séries réelles. On l'introduit en vue de la démonstration de la prop. 36 :

Notation 33. On pose lorsque $u_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_n^+ = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) = \max(u_n, 0) \\ u_n^- = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) = \max(-u_n, 0) \end{cases}.$$

Observons que :

Remarque 34. $u_n^+, u_n^- \in \mathbb{R}_+$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et donc $u_n^+, u_n^- \in [0, |u_n|]$.

Définition 35. On dit qu'une série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si $\sum |u_n|$ converge. Si $\sum u_n$ est convergente sans être absolument convergente, on dit que $\sum u_n$ est ***semi-convergente***.

La remarque 34. fournit facilement, dans le cas réel :

Proposition 36. ***Si*** *$\sum u_n$ est absolument convergente,* ***alors*** *$\sum u_n$ converge et*

$$\left|\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Dans le cas complexe, il suffit d'appliquer la notation 33. à $\Re u_n$ et $\Im u_n$ et d'utiliser la remarque 13.

Attention ! La réciproque est fausse !

Exemple 37. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-CV (et non CVA).

Remarque 38. Si $(u_n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Attention ! La réciproque est fausse !

Exemple 39. Si $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $\sum u_n$ CV (BERTRAND) bien que (u_n) ne soit dominée par aucun $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

5.1 Critères de convergence absolue

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, *ne s'annulant pas.*

Critère 40 (D'ALEMBERT). *On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite ℓ ($\in \overline{\mathbb{R}}_+$).*

- *si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge absolument ;*
- *si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Critère 41 (CAUCHY). *On suppose que $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)$ admet une limite ℓ ($\in \overline{\mathbb{R}}_+$).*

- *si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge absolument ;*
- *si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Remarque 42.

1. On retrouve ainsi le comportement des séries géométriques (ex. 11, $u_n = a^n$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \sqrt[n]{|u_n|} = |a|$).
2. Dans ces deux derniers résultats, lorsque $\ell = 1$, on ne peut conclure, comme le montrent les deux exemples $u_n = \frac{1}{n}$ (DV) et $u_n = \frac{1}{n^2}$ (CV).
3. On déduit du th. de CESÀRO ([14]) que si $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ converge vers une limite ℓ, alors il en est de même de $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)$. Ainsi, le critère de CAUCHY est plus fin que celui de D'ALEMBERT.

Exemple 43. Si $u_n = \mathrm{e}^{(-1)^n - n}$, on peut conclure à la CV de $\sum u_n$ grâce au critère de CAUCHY, mais pas avec celui de D'ALEMBERT.

10. γ vaut environ 0,577 215 664... Après plus de deux siècles de recherches, on ne sait toujours pas si γ appartient à $\mathbb{Q}$ où à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
11. Bien sûr, f est croissante ; il faut adapter l'encadrement (4) et les inégalités qui s'ensuivent.
12. $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$
13. *Cf.* le chapitre "Intégrale généralisée" .
14. *Cf.* cours de 1[ère] année.

Exemple 44. Si $a \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente. Par définition, sa somme est l'***exponentielle*** du complexe a :

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Critère 45 (**RIEMANN, dit "$n^\alpha u_n$ "**). *On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lim (n^\alpha |u_n|) = \lambda$.*

- *si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge absolument ;*
- *si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge.*

Le critère de RIEMANN permet bien sûr de retrouver la CV des séries du même nom.

Remarquons que si $\lim (n^\alpha |u_n|) = 0$ avec $\alpha > 1$, $\sum u_n$ CVA tandis que si $\lim (n^\alpha |u_n|) = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge.

5.2 Application à l'étude de certaines séries

Dans les cas favorables, on peut effectuer un développement limité de u_n jusqu'à atteindre l'ordre des termes qui CVA (typiquement $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, *cf.* rem. 38).

On peut ainsi, en étudiant les termes semi-CV (p. ex. avec le th. 19), statuer sur le comportement de $\sum u_n$.

Exemple 46.

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ CV ;
- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ DV.

Ce dernier exemple montre aussi qu'*on ne peut se contenter d'un équivalent* pour étudier la CV d'une série *de signe variable* (comparer avec la prop. 25).

5.3 Produit de CAUCHY

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

Définition 47. Le **produit de CAUCHY** de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ définie par

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} \\ &= \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q \\ &= \sum_{p+q=n} u_p v_q \end{aligned}$$

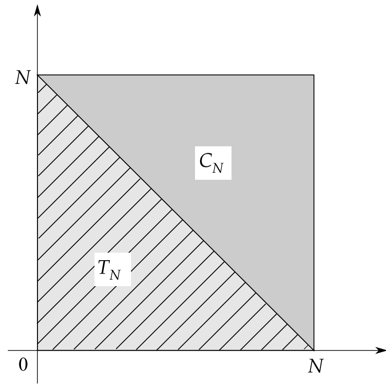
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'opération ainsi définie donne une nouvelle série absolument convergente. En effet, pour $N \in \mathbb{N}$, comparons les domaines de sommation :

- $\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in T_N} u_p v_q$;
- $\left(\sum_{p=0}^{N} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right) = \sum_{(p,q)\in C_N} u_p v_q$,

en notant :

$T_N = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq N\right\}$ et
$C_N = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq N \text{ et } q \leq N\right\}$:



et on a les inclusions évidentes $T_N \subset C_N \subset T_{2N}$, dont on déduit la propriété fondamentale du produit de CAUCHY :

Théorème 48. *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de $\sum w_n$ et de plus :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right).$$

L'application de cette propriété à la série exponentielle (ex. 44) donne la relation fonctionnelle fondamentale de la fonction exp :

Théorème 49. *Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,*

$$\exp (a+b) = \exp a \exp b.$$

Cf. le chapitre "Séries entières".

L'opération "produit de CAUCHY" (notons-la $*$) permet de compléter la structure de l'espace des séries *absolument* convergentes (*cf.* prop. 12).

Notons $\mathcal{A} = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ CVA}\right\}$. Alors,

Proposition 50. *$(\mathcal{A}, +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, et l'application "somme" :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{K} \\ (u_n) & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} u_k \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres *de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{K}$.*