PC - mathématiques

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Vocabulaire topologique

1.1 Normes, distances

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1. Une ***norme*** sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(N1) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;

(N2) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire) ;

(N3) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

On lui associe[1] la ***distance*** d définie par, si $x, y \in E$:

$$d(x,y) = N(y-x).$$

Cette application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifie : $\forall x, y \in E$,

(D1) $d(x,y) = d(y,x)$;

(D2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

(D3) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

L'inégalité triangulaire (N2) se généralise trivialement par récurrence.

En outre, si $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x \pm y)$.

Définition 2. Un $\mathbb{K}$-ev E muni d'une norme N est dit ***espace vectoriel normé***.

Exemple 3.

1. $|\cdot|$, valeur absolue sur $\mathbb{R}$ (*resp.* module sur $\mathbb{C}$) ;
2. Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, si $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ est une base de E et si $x = \sum_{i=1}^n x^i u_i$:
   - $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i|$;
   - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$;
   - $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^2\right)^{1/2}$.

   Cet exemple s'applique notamment lorsque $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{U}$ est la base canonique ;
3. Sur $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{K})$,
   - $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$ (*cf.* déf. 31) ;
   - $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$;
   - $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$.
4. La norme euclidienne[2] sur un $\mathbb{R}$-ev euclidien E est définie par $\|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$.

1. Attention, inversement, une distance ne provient pas nécessairement d'une norme.

2. Il s'agit d'une norme très particulière, qui a plus de propriétés qu'une norme "ordinaire". Elle vérifie notamment la relation de la *médiane*, et il est possible de préciser les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (N2).

Définition 4. Une norme N_1 sur un evn E est ***équivalente*** à une norme N_2 s'il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1. \tag{1}$$

Notation 5. $N_1 \sim N_2$

On vérifie facilement que "$\sim$" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Exemple 6. Les trois normes de l'exemple 3.2 sont équivalentes puisque pour tout $x \in E$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

1.2 Boules, parties bornées

Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-evn. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 7. La ***boule ouverte*** (*resp.* ***boule fermée***, ***sphère***) de centre a et de rayon r pour N est

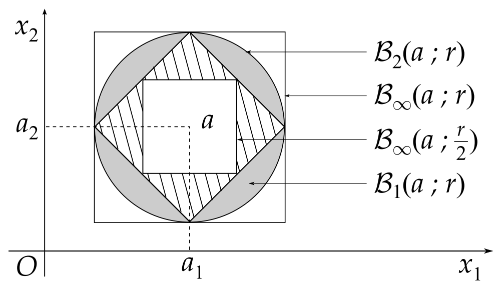
$$\mathcal{B}_N(a\ ;\ r) = \{x \in E \mid N(x-a) < r\}$$

(*resp.* $\mathcal{B}'_N(a\ ;\ r) = \{x \in E \mid N(x-a) \leq r\}$,
$\mathcal{S}_N(a\ ;\ r) = \{x \in E \mid N(x-a) = r\}$).

Lorsqu'on se réfère à la ***boule unité*** de E, il s'agit de $\mathcal{B}'_N(0_E\ ;\ 1)$.

Remarque 8. Dans $\mathbb{R}$, un intervalle borné ouvert (*resp.* fermé) est une boule ouverte (*resp.* fermée).

Exemple 9. Boules dans $\mathbb{R}^2$:



L'équivalence de deux normes N_1 et N_2 (relation (1)) se traduit par des inclusions entre les boules correspondantes :

$$\mathcal{B}_{N_1}\left(a\ ;\ \frac{r}{\beta}\right) \subset \mathcal{B}_{N_2}(a\ ;\ r)\ ;\ \mathcal{B}_{N_2}(a\ ;\ \alpha r) \subset \mathcal{B}_{N_1}(a\ ;\ r).$$

Cette remarque simple mais importante garantit que les définitions qui suivent *gardent le même sens si l'on remplace N par une norme N' équivalente à N*.

Définition 10. Une partie A de E est ***bornée*** s'il existe $a \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A \subset \mathcal{B}_N(a\ ;\ R)$.

Le point a de cette définition est arbitraire (d'après l'inégalité triangulaire).

Exemple 11.

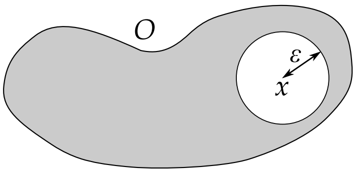
- $\varnothing$, les singletons, et plus généralement les parties finies ;
- les boules ouvertes ou fermées.

1.3 Ouverts, fermés, adhérence

Définition 12. Une partie O est ***ouverte*** si

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, \mathcal{B}_N(x\,;\,\varepsilon) \subset O.$$

Cela signifie que dans O, on peut trouver des points arbitrairement proches de x "dans toutes les directions" : x n'est jamais sur la *frontière* [3] de O.



Exemple 13.
- $\varnothing$, E ;
- les boules ouvertes pour N ;
- $E - \{a\}$ si $a \in E$;
- dans $\mathbb{R}$, les réunions d'intervalles ouverts.

Proposition 14.

1. *Si O_1 et O_2 sont deux ouverts de E, $O_1 \cap O_2$ est ouvert ;*
2. *Si O_i est ouvert pour tout $i \in I$, $\bigcup_I O_i$ est ouvert.*

Remarque 15. L'ouverture est une propriété *relative* : $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{C}$.

Définition 16. Une partie F de E est ***fermée*** si $\complement_E F$ est ouverte.

Intuitivement, les points de la *frontière*[3] de F appartiennent à F.

Exemple 17.
- $\varnothing$, E ;
- les boules fermées, les sphères pour N ;
- les singletons (et les parties finies) ;
- dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés.

Proposition 18.

1. *Si F_1 et F_2 sont deux fermés de E, $F_1 \cup F_2$ est fermé ;*
2. *Si F_i est fermé pour tout $i \in I$, $\bigcap_I F_i$ est fermée.*

Soient $A \subset E$ et $a \in E$.

Définition 19. a est ***adhérent à A*** si toute boule ouverte centrée en a, $\mathcal{B}_N(a\,;\,\varepsilon)$ rencontre A ($\mathcal{B}_N(a\,;\,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, N(x - a) < \varepsilon.$$

Le point a n'appartient donc peut-être pas à A, mais on trouve des points de A arbitrairement proches de a.

Cette définition est importante pour la mise en place des notions de limite et de continuité.

3. Cette notion est prise dans son sens intuitif. Sa définition rigoureuse est hors-programme.

Exemple 20.

1. Si $a \in A$, a est adhérent à A ;
2. Les points d'une sphère S sont adhérents à la boule ouverte correspondante ;
3. Dans $\mathbb{R}$, tout point de $\mathbb{Q}$ (*resp.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$) est adhérent à $\mathbb{R}$;
4. Dans $\mathbb{R}$, si $\sup(A)$ (*resp.* $\inf A$) existe, il est adhérent à A ;
5. Si F est fermée, tout point adhérent à F appartient à F.

Ce dernier exemple est général : en effet, les parties fermées sont exactement les parties contenant tous leurs points adhérents.

2 EVN de dimension finie

Dans toute la suite, le $\mathbb{K}$-evn E est supposé de dimension finie.

Dans ce cas, la définition 4. est trivialement réalisée en vertu du th. suivant (admis) :

Théorème 21. *Sur l'evn de dimension finie E,* toutes *les normes sont équivalentes.*

Il est donc superflu de préciser pour quelle norme sont données les définitions suivantes .

Définition 22. Une partie K de E est ***compacte*** [4] si elle est fermée et bornée.

Exemple 23.

1. $\varnothing$; les parties finies ;
2. les boules fermées ; les sphères.
3. Tout segment est un compact de $\mathbb{R}$.

Remarque 24. Tout compact non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand (*resp.* plus petit) élément.

2.1 Suites dans un evn

(E, N) est un $\mathbb{K}$-evn. L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E est canoniquement un $\mathbb{K}$-ev. Soit (x_n) une suite d'éléments de E.

Si nécessaire, on fixera une base $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_p)$ de E et on notera pour tout n :

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} x_n^i u_i \tag{2}$$

(càd $x_n^i = u^{*i}(x_n)$), définissant ainsi les p suites $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ "coordonnées dans $\mathcal{U}$". On se ramène ainsi à l'étude de p suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2.1.1 Suites bornées

Définition 25. $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si son image $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.

En d'autres termes, tous les termes de la suite sont contenus dans une certaine boule de E (dont le centre est arbitraire, *cf.* déf. 10). On vérifie facilement que, dans la situation de la formule (2) :

4. Attention ! Cette définition ne peut être étendue telle quelle à la dimension quelconque.

Proposition 26. (x_n) *est bornée* ssi $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$.

En outre, l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées est un $\mathbb{K}$-ev (sev de $E^{\mathbb{N}}$).

Lorsque $E = \mathbb{K}$, $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

2.1.2 Suites convergentes

Définition 27. $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est ***convergente*** s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\qquad n \geq n_0 \Rightarrow N(x_n - \ell) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

ℓ est alors unique : c'est ***la limite*** de (x_n) notée

$$\ell = \lim (x_n).$$

On remarque que la définition (3) est équivalente à la convergence vers 0 de $(N(x_n - \ell))$ (dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Soulignons à nouveau que *le sens de cette définition n'est pas changé si l'on remplace N par une norme équivalente N'* :

$$N(x_n - \ell) \to 0 \Longleftrightarrow N'(x_n - \ell) \to 0.$$

On peut également la traduire sur les coordonnées :

Proposition 28. *Si* $\ell = \sum_{i=1}^{p} \ell^i u_i$, *il y a équivalence entre*

1. (x_n) *converge vers* ℓ *et*
2. $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ^i *pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$.

Par exemple :

- Dans $\mathbb{K}^p$, $\left(x_n^1, ..., x_n^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\ell^1, ..., \ell^p\right)$ *ssi* $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^i pour tout $i = 1, ..., p$;
- Dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\left(\left(a_n^{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\ell^{i,j}\right)$ *ssi* $\left(a_n^{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{i,j}$ pour tous $i \in [\![1, p]\!]$, $j \in [\![1, q]\!]$.

On en déduit les propriétés algébriques des limites, notamment :

Proposition 29. *Soient* (x_n), $(y_n) \in E$ *et* λ, $\mu \in \mathbb{K}$. ,

1. *Si* (x_n) *converge vers* ℓ *et* (y_n) *converge vers* ℓ', $(\lambda x_n + \mu y_n)$ *converge vers* $\lambda\ell + \mu\ell'$;
2. *Si* (x_n) *converge vers* ℓ *et si* (λ_n) $(\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ *converge vers* λ, $(\lambda_n x_n)$ *converge vers* $\lambda\ell$.

Toute suite convergente est bornée : l'ensemble $CV(E)$ des suites convergentes d'éléments de E est un $\mathbb{K}$-ev (sev de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$). $CV(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

En outre, la notion de suite convergente permet une caractérisation de la déf. 19. :

Théorème 30. *Soient* $A \subset E$ *et* $a \in E$. *Il y a équivalence entre*

1. *a est adhérent à A, et*
2. *a est la limite d'une suite de points de A.*

2.1.3 Relations de comparaison

Les relations o et O se définissent *par rapport à une suite à valeurs réelles* : si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

- $(u_n) = O(\alpha_n) \Leftrightarrow (\|u_n\|) = O(\alpha_n)$;
- $(u_n) = o(\alpha_n) \Leftrightarrow (\|u_n\|) = o(\alpha_n)$;

La relation "$\sim$" n'a de sens *qu'entre suites à valeurs réelles ou complexes* (*cf.* cours de 1ère année et chap. "Étude locale").

2.2 Étude locale des fonctions

E et F sont deux evn munis de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On considère des applications $f : A \to F$ définies sur une partie A de E. Si nécessaire, on décomposera $f(x)$ sur une base $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_p)$ de F :

$$f(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} f^j(x)\, v_j \tag{4}$$

2.2.1 Applications bornées

On définit comme en 2.1. la notion d'application bornée (Im f est une partie bornée de F). L'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées de A dans F est un sev de $\mathcal{F}(A, F)$.

On peut alors poser :

Définition 31. Si $f \in \mathcal{B}(A, F)$,

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_A \|f\|_F = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

On vérifie alors :

Proposition 32. N_∞ *est une norme sur* $\mathcal{B}(A, F)$.

2.2.2 Limites, continuité

Soit a un point ***adhérent*** *à A.*

Définition 33. f ***admet une limite en a*** s'il existe $b \in F$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \\ &\qquad \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F < \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

b est alors unique ; c'est ***la*** limite de f en a notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ (*resp.* $F = \mathbb{R}$), cette définition peut être adaptée de manière usuelle au cas où $a = \pm\infty$ (*resp.* $b = \pm\infty$), *cf.* cours de 1ère année.

Cette définition admet le cas particulier important où $a \in A$. Dans ce cas, nécessairement $b = f(a)$ et on obtient la notion d'application continue :

Définition 34. f est ***continue en a*** si

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \\ &\qquad \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Ces définitions 33. et 34. peuvent être traduites en termes des p applications coordonnées f^j (formule 4) :

Proposition 35. *Si* $b = \sum_{j=1}^{p} b^j v_j$, f *admet pour limite b en a* ssi f^j *admet pour limite* b^j *en a pour* $j = 1, ..., p$.

Le cas où $a \in A$ (et $b = f(a)$) donne un énoncé similaire pour la continuité.

On en déduit les règles opératoires sur les limites :

Proposition 36. *Soient* f, $g : A \to F$ *et* λ, $\mu \in \mathbb{K}$. *Si* f (resp. g) *admet pour limite* b (resp. b') *en a*, $\lambda f + \mu g$ *admet pour limite* $\lambda b + \mu b'$ *en a.*

En particulier, si f et g sont continues en a $(\in A)$, il en est de même de $\lambda f + \mu g$.

Lorsque cette propriété est vérifiée pour tout $a \in A$ on obtient : l'ensemble $\mathscr{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-ev (sev de $\mathscr{F}(A, F)$).

L'énoncé d'un résultat pour la composée exige davantage de précautions.

Dans la situation suivante (E, F, G evn) :

$$E \supset A \quad \xrightarrow{f} \quad B \subset F \quad \xrightarrow{g} \quad G$$

Théorème 37 (composition des limites). *Soient a un point **adhérent** à A, et $b \in B$. Si f admet pour limite b en a et si g est **continue** en b, $g \circ f$ admet pour limite $g(b)$ en a.*

Cet énoncé devient *faux* si l'on suppose seulement que g *admet une limite* en b. Par contre, il se simplifie notablement si f est continue en a (dans le cas où $a \in A$) :

Corollaire 38. *Si $a \in A$, et si f* (resp. g) *est continue en a* (resp. $f(a)$)*, alors $g \circ f$ est continue en a.*

La continuité en un point peut être caractérisée à l'aide de limites de suites :

Théorème 39 (continuité séquentielle). *Si $f : A \to F$ et si $a \in A$, il y a équivalence entre :*

1. *f est continue en a et*
2. *pour toute suite (u_n) convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

La propriété globale suivante des fonctions continues est admise :

Théorème 40. *Soit $f : A \to F$ (evn) une application continue sur $A \subset E$ (evn). Si $K \subset A$ est une partie compacte de A, $f \langle K \rangle$ est une partie compacte de F.*

Lorsque $f : A \to \mathbb{R}$, on obtient

Corollaire 41. *Si f est continue sur le compact $K \subset A$, f est bornée et f "atteint ses bornes" .*

2.2.3 Applications lipschitziennes

Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

Définition 42. Soit $f : A \to F$. f est ***k-lipschitzienne*** sur A si pour tous $x, y \in A$:

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq k \|y - x\|_E .$$

f est dite ***lipschitzienne*** s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Exemple 43.

1. Une application 0-lipschitzienne est constante ;
2. La norme sur $N : E \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \|x\|_E$ est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient N et N' deux normes sur E. L'équivalence de N et N' signifie précisément que Id_E est lipschitzienne de (E, N) dans (E, N') ainsi que sa réciproque.

Cette définition 42. est (strictement) plus forte que la continuité globale :

Proposition 44. *Si $f : A \to F$ est lipschitzienne sur A, f est continue sur A.*

On vérifie facilement

Proposition 45.

1. *Si $f, g : E \to F$ sont lipschitziennes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est lipschitzienne ;*
2. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont lipschitziennes, $g \circ f$ est lipschitzienne.*

2.2.4 Relations de comparaison

Comme pour les suites, on donne un sens aux relations "O" et "o" *par rapport à une fonction à valeurs réelle*.

Plus précisément : soient $A \subset E$, a un point adhérent à A, $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$. Alors

- $f(x) = O(\varphi(x))\ [x \to a] \Leftrightarrow$
  $\|f(x)\|_E = O(\varphi(x))\ [x \to a]$;
- $f(x) = o(\varphi(x))\ [x \to a] \Leftrightarrow$
  $\|f(x)\|_E = o(\varphi(x))\ [x \to a]$.

3 Applications linéaires continues

Soient E et F deux evn munis de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Soit $f \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Proposition 46. *Il y a équivalence entre*

1. *f est continue sur E ;*
2. *f est continue en 0_E ;*
3. *f est bornée sur la boule unité de E ;*
4. *Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$;*
5. *f est lipschitzienne.*

La condition 4. est souvent la plus pratique à vérifier. *Lorsque E et F sont de dimensions finies*, toutes ces conditions sont automatiquement remplies :

Théorème 47. *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-evn de dimensions finies,* toute *application linéaire de E dans F est continue sur E.*

La continuité des applications multilinéaires s'étudie de manière similaire. Par exemple :

Proposition 48. *Si E, F, G sont trois evn et si $\varphi : E \times F \to G$ est bilinéaire, φ est continue sur $E \times F$* ssi *il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $\|\varphi(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F$.*

Là encore, cette condition est automatiquement réalisée en dimension finie. Notamment :

Exemple 49. Les applications suivantes sont continues :

1. $\mathbb{K} \times E \to E$; $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$;
2. $L_{\mathbb{K}}(E) \times L_{\mathbb{K}}(E)$; $(u, v) \mapsto u \circ v$;
3. $E^n \to \mathbb{K}$; $(x_1, ..., x_n) \mapsto \det_{\mathcal{U}}(x_1, ..., x_n)$ ($\mathcal{U}$ base du $\mathbb{K}$-evn E) ;
4. $E \times E \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ sur le $\mathbb{R}$-ev euclidien E.