PCSI - mathématiques

Torseurs

$\mathcal{E}_3$ désigne $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique. O désigne une origine quelconque, $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est la base canonique.

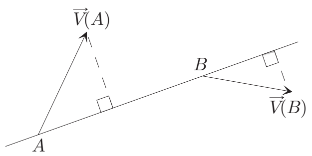
1 Champs équiprojectifs

1.1 Rappels et définitions

1. Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme antisymétrique (càd, vérifiant $(f(x)\mid y)=-(x\mid f(y))$ pour tous x, $y\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $\vec{\Omega}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, $f(\vec{x})=\vec{\Omega}\wedge\vec{x}$.
2. Si la matrice (antisymétrique) de f dans une BOND $\mathcal{U}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est notée $\begin{pmatrix}0&-r&q\\r&0&-p\\-q&p&0\end{pmatrix}$ alors on vérifie que $\vec{\Omega}=p\vec{u}_1+q\vec{u}_2+r\vec{u}_3$.

Définition 1 *Un champ de vecteurs $\vec{V}:U\to\mathbb{R}^3$ est* équiprojectif *si pour tous A, $B\in U$:*

$$\left(\vec{V}(A)\;\middle|\;\overrightarrow{AB}\right)=\left(\vec{V}(B)\;\middle|\;\overrightarrow{AB}\right).$$



Proposition 1 *Si $\vec{V}:U\to\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs, il y a équivalence entre*

(1) *$\vec{V}$ est équiprojectif, et*

(2) *$\vec{V}$ est une application affine et sa partie linéaire est antisymétrique.*

(2) signifie qu'il existe $\vec{\Omega}\in\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $M\in\mathcal{E}_3$:

$$\vec{V}(M)=\vec{V}(O)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}. \tag{1}$$

On dit alors que $\vec{V}$ est un *torseur*. La formule (1) est la formule de Varignon. Un torseur est donc un champ de vecteurs équiprojectif.

Si $\vec{V}$ est un torseur, on appelle :

- $\vec{V}(M)$, valeur de $\vec{V}$ en M, est le *moment* de $\vec{V}$ en M ou *vitesse* de M ;
- $\vec{\Omega}$ est la *résultante* du torseur ;
- $\left(\vec{V}(O),\vec{\Omega}\right)$ sont les *éléments de réduction* du torseur en O.

1.2 Exemple fondamental : champ des vitesses d'un solide

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de points dont la position dépend (de façon $\mathcal{C}^1$) d'un paramètre t (“*temps*”), tel que pour tous A, $B\in\mathcal{S}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ soit constant : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\overrightarrow{A(t)B(t)}\right\|=0$.

On définit le *champ des vitesses de $\mathcal{S}$ à l'instant t* par

$$\vec{V}_t(A)=\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}(t)}{\mathrm{d}t}(t)$$

si l'origine O est “fixe”. Écrivons

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\overrightarrow{A(t)B(t)}\right\|^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{A(t)B(t)}\;\middle|\;\overrightarrow{A(t)B(t)}\right)\\&=2\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A(t)B(t)}}{\mathrm{d}t}(t)\;\middle|\;\overrightarrow{A(t)B(t)}\right)\end{aligned}$$

or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A(t)B(t)}}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OB(t)}-\overrightarrow{OA(t)}\right)}{\mathrm{d}t}=\vec{V}_t(B)-\vec{V}_t(A)$ d'où

$$\left(\vec{V}_t(B)-\vec{V}_t(A)\;\middle|\;\overrightarrow{A(t)B(t)}\right)=0:$$

$\vec{V}$ est bien équiprojectif.

1.3 Paramètres des torseurs

Proposition 2 *L'ensemble $\mathcal{V}$ des torseurs de $\mathcal{E}_3$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 6. De plus, pour tout $A\in\mathcal{E}_3$, l'application $\Theta_A:\vec{V}\mapsto\left(\vec{V}(A),\vec{\Omega}\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\simeq_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^6$.*

Notation 1 $\vec{V}(O)=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$ *;* $\vec{\Omega}=L\vec{\imath}+M\vec{\jmath}+N\vec{k}$. *$(X,Y,Z,L,M,N)$ sont appelées les* composantes *de $\vec{V}$ dans le repère $\mathcal{R}=\left(O\;;\;\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)\right)$.*

On peut choisir le repère tel que $X=Y=L=M=0$.

Proposition 3 *Un torseur est* constant *ssi $\vec{\Omega}=\vec{0}$.*

Définition 2 *Un tel torseur est appelé un* couple.

Proposition 4 *Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux torseurs. Si $A\in\mathcal{E}_3$, le réel $\left(\vec{V}_1(A)\;\middle|\;\vec{\Omega}_2\right)+\left(\vec{V}_2(A)\;\middle|\;\vec{\Omega}_1\right)$ est* indépendant *du point A.*

Définition 3 *Le* comoment *de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est la quantité précédente notée*

$$\gamma\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right)=\left(\vec{V}_1(A)\;\middle|\;\vec{\Omega}_2\right)+\left(\vec{V}_2(A)\;\middle|\;\vec{\Omega}_1\right).$$

γ est une *forme bilinéaire symétrique* sur $\mathcal{V}$.

Définition 4 *Si $\vec{V}\in\mathcal{V}$, l'*invariant scalaire *de $\vec{V}$ est le comoment de $\vec{V}$ avec lui-même :*

$$q\left(\vec{V}\right)=\frac{1}{2}\gamma\left(\vec{V},\vec{V}\right)=\left(\vec{V}(A)\;\middle|\;\vec{\Omega}\right)$$

(quel que soit le point A).

Si $(X_1,...,N_1)$ et $(X_2,...,N_2)$ sont les composantes de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le repère $\mathcal{R}=\left(O\;;\;\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)\right)$, on calcule :

- $\gamma\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right)=X_1L_2+Y_1M_2+Z_1N_2+X_2L_1+Y_2M_1+Z_2N_1$;
- $q\left(\vec{V}_1\right)=X_1L_1+Y_1M_1+Z_1N_1$.

2 Axe central

2.1 Théorème et définition

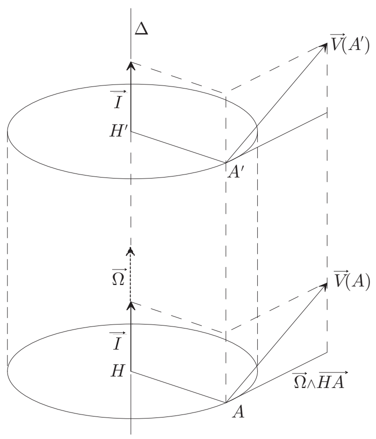
Théorème 1 *Soit $\vec{V}$ un torseur* non constant.

1. *Le lieu des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que la famille $\left(\vec{\Omega}, \vec{V}(M)\right)$ soit liée est une droite Δ dirigée par $\vec{\Omega}$.*
2. *La restriction de $\vec{V}$ à Δ est constante en un vecteur $\vec{I}$.*
3. *Pour tout $A \in \mathcal{E}_3$, on a $\vec{I} = p_{\vec{\Delta}}\left(\vec{V}(A)\right) = h\vec{\Omega}$ avec $h = \frac{\left(\vec{V}(A) \mid \vec{\Omega}\right)}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2} = \frac{q(\vec{V})}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2}$ ($\vec{\Delta}$ étant la direction de Δ).*

Définition 5

- Δ *est l'*axe central *de $\vec{V}$.*
- $\vec{I}$ *est l'*invariant vectoriel *de $\vec{V}$ ou "*vitesse de translation*" $\vec{V}_T$.*

2.2 Conséquences



1. $A \in \mathcal{E}_3$, $H = p_\Delta(A)$: $\vec{V}(A) = \vec{V}(H) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}$.
$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}$ dirige la tangente au cercle passant par A, centré en H et orthogonal à Δ. De même pour $A' = A + t\vec{\Omega}$: $\vec{V}(A') = \vec{V}(A)$.
$\vec{V}$ est donc invariant par translation de vecteur directeur de Δ.
2. Si A'' s'obtient à partir de A par rotation (affine) d'axe Δ, d'angle[1] θ, $\vec{V}(A'')$ s'obtient à partir de $\vec{V}(A)$ par rotation (vectorielle) d'axe $\vec{\Delta}$, d'angle[1] θ.
$\left\|\vec{V}\right\|$ est donc invariant par rotation d'axe Δ.
3. Le th. de Pythagore donne (avec $r = d(A\ ;\ \Delta)$) : $\left\|\vec{V}(A)\right\|^2 = \left\|\vec{I}\right\|^2 + \left\|\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}\right\|^2 = I^2 + \Omega^2 r^2$:
$\left\|\vec{V}\right\|$ ne dépend donc que de r et est fonction strictement croissante de r.

3 Torseurs élémentaires

Définition 6 *Le torseur $\vec{V}$ est* élémentaire *si son invariant scalaire $q\left(\vec{V}\right)$ est nul.*

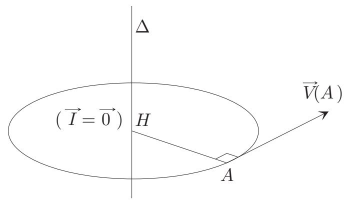
[1] Δ et $\vec{\Delta}$ étant munies d'une orientation quelconque (mais identique), et $\vec{\Delta}^\perp$ étant muni de l'orientation induite.

Comme $q\left(\vec{V}\right) = \left(\vec{V}(O) \mid \vec{\Omega}\right)$, il y a deux cas :

Cas 1 *$\vec{\Omega} = \vec{0}$: il s'agit des couples.*

Cas 2 *$\vec{\Omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{V}(O) \perp \vec{\Omega}$.*

Alors l'invariant vectoriel $\vec{I} = p_{\vec{\Delta}}\left(\vec{V}(O)\right)$ est nul. Ondit dans ce cas que $\vec{V}$ est un *glisseur.*



Ces torseurs sont caractérisés par les conditions équivalentes suivantes :

Proposition 5 *Soit $\vec{V}$ un torseur non constant. Il y a équivalence entre*

(1) *Il existe A tel que $\left(\vec{V}(A) \mid \vec{\Omega}\right) = 0$.*

(2) *Il existe H tel que $\vec{V}(H) = \vec{0}$.*

(3) *L'invariant vectoriel $\vec{I}$ est nul ($\vec{V}_{|\Delta} = \vec{0}$).*

(4) *L'invariant scalaire $q\left(\vec{V}\right)$ est nul.*

Si $\vec{V}$ est un glisseur, $\lambda\vec{V}$ est un glisseur pour tout réel non nul λ.

Mais **attention !** La somme de deux glisseurs *n'est pas*, en général, un glisseur (*cf.* prop. 7., et ex. 2. pour une discussion plus générale).

Un glisseur $\vec{G}$ est entièrement déterminé par

- un point A de son axe central ($\vec{G}(A) = \vec{0}$) ;
- sa résultante $\vec{\Omega}$.

Définition 7 *Si Δ est une droite dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\vec{u}$, le moment d'un torseur $\vec{V}$ par rapport à Δ est $\left(\vec{V}(A) \mid \vec{u}\right)$, où A est un point (quelconque) de Δ.*

3.1 Décomposition en torseurs élémentaires

Proposition 6 *Soient $\vec{V}$ un torseur et $A \in \mathcal{E}_3$. $\vec{V}$ se décompose de façon unique en $\vec{V} = \vec{C} + \vec{G}$ où $\vec{C}$ est un couple et $\vec{G}$ un glisseur d'axe passant par A.*

Proposition 7 *Soient $\vec{C}$ un couple et $\vec{G}_1$ un glisseur d'axe orthogonal à $\vec{C}$. Il existe un unique glisseur $\vec{G}_2$ tel que $\vec{C} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$.*

3.2 Choix des repères

- Pour les problèmes à un seul torseur, on optera pour un repère où Oz coïncide avec l'axe central.
- Pour les problèmes à deux torseurs, il sera souvent judicieux de prendre pour Oz la perpendiculaire commune à leurs deux axes Δ_1 et Δ_2 et de choisir Ox et Oy tels que les axes se mettent sous la forme

$$\Delta_1 \left\{ \begin{smallmatrix} y=mx \\ z=a \end{smallmatrix} \right. ;\ \Delta_2 \left\{ \begin{smallmatrix} y=-mx \\ z=-a \end{smallmatrix} \right. .$$