PCSI - mathématiques

Rudiments de logique

1 Logique mathématique

En 320 av. J.-C., Euclide publie les *Éléments*. À partir de définitions et d'axiomes, il déduit des règles de géométrie qui resteront en vigueur jusqu'au XVII^e^ siècle. Mais, jusqu'au XIX^e^ siècle, la logique mathématique demeure une réflexion sur la nature des mathématique et leurs fondements.

En 1870, Georg Cantor créé la *théorie des ensembles* ainsi que des *cardinaux* et des *ordinaux*. Il croit déceler des contradictions. Il apparaît alors indispensable d'intégrer la logique aux mathématiques et réciproquement. Les confusions sont dues à l'utilisation à mauvais escient, en mathématiques, de notions et de symboles logiques. Il est nécessaire d'utiliser un langage entièrement formalisé, où les définitions ne reposent plus sur l'intuition.

2 Logique propositionnelle

La logique propositionnelle vise à restreindre le langage à un ensemble de phrases qui soient à coup sûr vraies ou fausses, sans ambiguïté, afin de prévenir les contradictions.

2.1 Connecteurs propositionnels

Les phrases peuvent être combinées de diverses façons pour en former de plus complexes. Les connecteurs de la logique propositionnelle décrivent certaines combinaisons permettant d'obtenir la *valeur de vérité* (vrai ou faux) de la phrase composée chaque fois que l'on connaît les valeurs de vérité des phrases composantes.

2.1.1 Négation

Dans le langage courant, une phrase peut être de niée de plusieurs façons différentes. Sa valeur de vérité peut être graduée (phrase "plus ou moins vraie"), et la négation peut porter seulement sur une partie de la phrase.

La logique propositionnelle ne permet pas cela et demande que la négation d'une phrase soit définie de manière univoque et non ambiguë.
Si $\mathcal{A}$ est une phrase, on note sa négation $\neg\mathcal{A}$ (qui se lit "non $\mathcal{A}$"). C'est la phrase vraie lorsque $\mathcal{A}$ est fausse et *vice-versa*.

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

2.1.2 Conjonction

Il s'agit du connecteur "et"

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et sont des phrases, on note $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ leur conjonction (lire "$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$"). C'est la phrase qui est vraie dans le seul cas où les phrases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes deux.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2.1.3 Disjonction

Il s'agit du connecteur "ou" inclusif.

Dans le langage courant il y a deux "ou" : inclusif et exclusif ("ou bien") : on choisit le "ou" inclusif, qui est de loin le plus utile en mathématiques.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des phrases, on note leur disjonction $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ (lire "$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$"). C'est donc la phrase qui est vraie dès que l'une au moins des deux phrases $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ l'est.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.1.4 Implication

Il s'agit du connecteur "si..., alors..." (ex. : s'il pleut, alors je prends mon parapluie.)

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des phrases, "$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$", "si $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{B}$" se notent $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

L'usage habituel n'est pas clair vis-à-vis de la notion de vérité. Il est sûr que si la phrase $\mathcal{A}$ est vraie et si la phrase $\mathcal{B}$ et fausse, la phrase "$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$" et fausse.

Examinons les cas suivants :

(1) Si $2 + 2 = 4$, Paris est capitale de la France.

(2) Si $2 + 2 = 5$, Paris est capitale de la France.

(3) Si $2 + 2 = 5$, Berlin est capitale de la France.

Leurs valeurs de vérité ne sont pas évidentes, car on est habitué, dans une phrase "si $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{B}$", à une relation de causalité entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

On adopte la table de vérité suivante, qui s'est imposée dans l'usage mathématique :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On note que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse seulement lorsque $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ fausse — ce qui est intuitif. Il en résulte que *la négation d'une implication n'est pas une autre implication.* On verra que la négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à $\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$ (voir plus loin).

2.1.5 Équivalence

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des phrases, on note $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ la phrase "$\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{B}$".

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

C'est l'*équivalence logique* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, qui est vraie seulement lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent la même valeur de vérité.

2.2 Systèmes de valeurs de vérité

2.2.1 Construction d'un langage formalisé $\mathcal{L}$

Pour étudier plus en détail comment la valeur de vérité d'une phrase dépend de celle des phrases composantes, nous allons utiliser une langue $\mathcal{L}$ ne contenant que les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et construite de la manière suivante :

- On se donne les "énoncés élémentaires" que l'on représente par la lettre A, B, C, ... Intuitivement, ces "énoncés élémentaires" sont les phrases plus courtes possibles ayant un sens dans la langue $\mathcal{L}$.

- Les énoncés de langue $\mathcal{L}$ se construisent à l'aide des règles suivantes :

  1. Tout énoncé élémentaire est un énoncé.
  2. Si $\mathcal{A}$ est un énoncé, $\neg\mathcal{A}$ est un énoncé.
  3. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des énoncés, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ sont des énoncés.

2.2.2 Systèmes de valeurs de vérité

Un *système de valeurs de vérité* consiste en la donnée, pour chaque énoncé élémentaire, d'une valeur de vérité (V ou F).

L'*ordre* d'un énoncé est le nombre total d'occurrences de connecteurs figurant dans son écriture.

Exemples

- L'ordre de énoncé $(A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow (D \Rightarrow A))$ est 4.

- L'ordre d'un énoncé élémentaire est 0.

Théorème 1 *Un système de valeurs de vérité étant donné, les tables de vérité des connecteurs non, et, ou, implique, équivalence permettent d'attribuer à chaque énoncé de langue $\mathcal{L}$ une valeur de vérité est une seule (vrai ou faux).*

Preuve. par récurrence sur l'ordre n des énoncés ■

Exemple 1 *valeur de vérité de énoncé*

$$((\neg A) \vee B) \Rightarrow C : \qquad (\mathcal{A})$$

- pour le système de valeurs de vérité :

A	B	C
V	F	V

;

$$\begin{array}{ccccc} (\neg A & \vee & B\ ) & \Rightarrow & C \\ | & | & | & | & | \\ \mathrm{F} & \mathrm{V} & \mathrm{V} & \mathbf{V} & \mathrm{V} \end{array}$$

- pour le système :

A	B	C
F	F	F

, $\mathcal{A}$ est faux.

2.3 Tautologies

Dans le langage courant, les énoncés "S'il pleut, il pleut", "Il pleut ou il ne pleut pas" sont toujours vrais. Leur vérité provient de leur forme. On les appelle *tautologies*.

Définition 1 *Une* tautologie *de la langue $\mathcal{L}$ est un énoncé de $\mathcal{L}$ qui a la valeur vraie quel que soit le système de valeurs de vérité choisi.*

Exemple 2 *Quels que soient les énoncés $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, les énoncés suivants sont des tautologies :*

1. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A})$;
2. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$;
3. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$;
4. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$; $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$;
5. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$;$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$;
6. $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$;
   $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$;
   $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}))$;
7. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$;
8. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$;
9. $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$;
10. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$.

- Pour montrer qu'un énoncé est une tautologie, on peut faire un tableau :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	F	**V**
F	F	V	**V**

La dernière colonne montre que $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ est une tautologie.

- Autre méthode : on essaie de trouver un système de valeurs de vérité pour lequel l'énoncé est faux. Si un tel système n'existe pas, l'énoncé est une tautologie :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \Rightarrow\ (& \mathcal{B} & \Rightarrow & \mathcal{A}\ ) \\ | & | & | & | & | \\ \mathbf{V} & \mathrm{F} & \mathrm{V} & \mathrm{F} & \mathbf{F} \end{array}$$

Ce schéma montre qu'il n'existe aucun système de valeurs de vérité rendant l'énoncé 2. faux.

2.4 Déduction sous hypothèses

Nous utilisons la langue $\mathcal{L}$.

On considère une liste de J d'énoncés qu'on appelle les *axiomes* de la théorie qu'on désire construire.

Définition 2 *Une* déduction sous les hypothèses J *est une suite finie d'énoncés telles que chaque énoncé $\mathcal{C}$ de la suite possède l'une des trois propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{C}$ figure dans la liste J ;*
2. *$\mathcal{C}$ est une tautologie ;*
3. *Il existe un énoncé $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{C}$ soit précédé dans la suite des énoncés de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.*

Le nombre d'énoncés qui figure dans la suite s'appelle la *longueur* de la déduction.

Un énoncé est *déductible* sous les hypothèses J s'il est le dernier énoncé d'une déduction.

Notation 1 *Si $\mathcal{A}$ est déductible sous les hypothèses J, on note $J \vdash \mathcal{A}$ (lire "J infère $\mathcal{A}$").*

Remarque 1
1. *Si $\mathcal{A}$ figure dans une déduction, et si on supprime de cette déduction tous les énoncés qui suivent $\mathcal{A}$, on obtient encore une déduction sous les hypothèses J, donc $J \vdash \mathcal{A}$.*
2. *Si $\mathcal{A}$ est un axiome, $\mathcal{A}$ est déductible sous les hypothèses J. En effet, la suite constituée par l'unique énoncé $\mathcal{A}$ est une déduction (de longueur 1) sous les hypothèses J.*
3. *Si $\mathcal{A}$ est une tautologie, $\mathcal{A}$ est déductible sous les hypothèses J (même raisonnement).*

2.4.1 Propriétés

Pour abréger "si $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{S}$" on écrit $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$ (1).

1. Modus-ponens : $\dfrac{J \vdash \mathcal{A} \text{ et } J \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{J \vdash \mathcal{B}}$

Notation 2 *Si J et J' sont des suites d'énoncés, on note J, J' la liste d'énoncés obtenue en réunissant J et J'.*

2.
$$\frac{J \vdash \mathcal{A}}{J, J' \vdash \mathcal{A}}$$
(Si $\mathcal{A}$ est un théorème, il le reste si l'on rajoute des hypothèses.)

3. Théorème de la déduction
$$\text{(a) } \frac{J \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{J, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}} \text{ ; (b) } \frac{J, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{J \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}.$$

4.
$$\frac{J, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{J \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$$
utile pour démontrer un résultat de la forme $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$: on suppose $\neg\mathcal{A}$; on doit pouvoir en déduire $\mathcal{B}$.

5.
$$\frac{J \vdash \mathcal{A} \text{ et } J \vdash \mathcal{B}}{J \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$$

6. Raisonnement par disjonction des cas
$$\frac{J, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \text{ et } J, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}}{J, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}}$$

7. (conséquence)
$$\frac{J, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \text{ et } J, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{C}}{J \vdash \mathcal{C}}$$

8. Raisonnement par l'absurde
$$\frac{J, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \text{ et } J, \neg\mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{B}}{J \vdash \mathcal{A}}$$
Ce schéma signifie que pour démontrer un énoncé $\mathcal{A}$, on peut supposer sa négation ($\neg\mathcal{A}$) et en déduire une certaine conséquence $\mathcal{B}$ ainsi que sa négation — une contradiction.

2.4.2 Théorie axiomatique

Soit J une liste d'énoncés. Les énoncés déductibles sous les hypothèses J sont les *théorèmes* de la *théorie axiomatique* $\mathcal{T}$ dont les axiomes sont les énoncés de la liste J

2.4.3 Théories contradictoires et théories consistantes

Théorème 2 *S'il existe un énoncé $\mathcal{C}$ tel que $J \vdash \mathcal{C}$ et $J \vdash \neg\mathcal{C}$, alors* tout *énoncé est un théorème de $\mathcal{T}$.*

Définition 3 *S'il existe un énoncé $\mathcal{C}$ qui est un théorème de $\mathcal{T}$ ainsi que sa négation, on dit que la théorie axiomatique $\mathcal{T}$ est* contradictoire. *Une théorie axiomatique $\mathcal{T}$ est* consistante *si elle n'est pas contradictoire, c'est-à-dire s'il n'existe aucun énoncé qui soit un théorème en même temps que sa négation.*

2.5 Résultats pratiques

$\mathcal{T}$ théorie axiomatique dont J est la liste des axiomes.

Règle 1 Si $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{T}$ et si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est une tautologie, alors $\mathcal{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Règle 2 Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une tautologie, $\mathcal{A}$ est un théorème si et seulement si $\mathcal{B}$ est un théorème.

La règle 2 peut s'exprimer ainsi : si $\mathcal{A}$ est un théorème et si $\mathcal{B}$ est équivalent à $\mathcal{A}$ (ce qui signifie que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une tautologie), alors $\mathcal{B}$ est un théorème.

2.5.1 Applications

1. $\dfrac{J \vdash \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{J \vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}}$; $\dfrac{J \vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}}{J \vdash \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}$: négations du $\wedge$ et du $\vee$;
2. $\dfrac{J \vdash \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}{J \vdash \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}$; $\dfrac{J \vdash \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}{J \vdash \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}$: lois de De Morgan ;

[1] Ce n'est pas l'implication logique, mais une abréviation dans la métalangue (le langage courant).

3. $\dfrac{J \vdash \neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})}{J \vdash \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}}$; $\dfrac{J \vdash \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}{J \vdash \neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})}$: négation d'une implication, cela résulte des tautologies suivantes :
   $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$,
   $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$,
   $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$.

4. $\dfrac{J \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{J \vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}}$; $\dfrac{J \vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}}{J \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}$: contraposition[2], cela résulte de la tautologie $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$.

3 Les quantificateurs

De nombreuses déductions de la logique traditionnelle ne peuvent pas être justifiées par le calcul propositionnel.

Exemples :

1. Tous les hommes sont mortels.
   Socrate est un homme.
   Donc Socrate est mortel.

2. Tout ami d'André est un ami de Bernard.
   Christian n'est pas un ami de Bernard.
   Donc Christian n'est pas un ami d'André.

3. Roméo aime Juliette.
   Donc quelqu'un aime Juliette.

La justesse de ces raisonnements ne peut pas être expliquée à l'aide du calcul propositionnel (tautologies + modus-ponens).

Pour rendre plus claire la structure de telles phrases nous allons introduire les notions d'*individu*, de *prédicat* et de *variable*.

Nous supposons que nous voulons étudier le comportement d'individus qui sont les êtres humains et tous les dieux et demi-dieux de la mythologie.

On désigne les individus par des lettres :
a (André), b (Bernard), c (Christian), s (Socrate), r (Roméo), j (Juliette)...

La phrase "Socrate est un homme" garde un sens quand on remplace l'individu Socrate par un autre.

On introduit une *variable* (p. ex. x) qu'on met à la place de l'individu Socrate pour obtenir "x est un homme" qui est un *prédicat à une variable libre*. Attention : ce n'est pas un énoncé (il n'a pas de valeur de vérité).

Seulement quand on remplace la variable x par un individu, on obtient une phrase ayant un sens (un énoncé).

De même, à partir de la phrase "Roméo aime Juliette" et de variables x et y, on construit le prédicat à deux variables libres "x aime y". Si l'on remplace x et y par des individus, on obtient une phrase ayant un sens (un *énoncé*).

Symbolisons "x est un homme" par $H(x)$, "x est mortel" par $M(x)$. (Alors "Socrate est un homme" est symbolisé par $H(s)$).

"Si Socrate est un homme, alors Socrate est mortel" se symbolise par $H(s) \Rightarrow M(s)$.

La phrase "Tous les hommes sont mortels" peut être remplacée par "Pour tout x, si x est un homme, alors x est mortel" ou encore "Pour tout x, $H(x) \Rightarrow M(x)$" ce qu'on écrit :

$$\forall x,\ H(x) \Rightarrow M(x)\,.$$

Dans cette écriture, on ne peut pas remplacer la lettre x par un individu, pour la bonne raison que *x ne figure pas dans cette phrase* (puisque c'est "Tous les hommes sont mortels"). On dit que la variable x est *liée* par le quantificateur $\forall$.

Avec ce symbolisme, 1. s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \forall x, & H(x) \Rightarrow M(x) \\ & (H(s) \Rightarrow M(s)) \\ & H(s) \\ \hline & M(s) \end{array}$$

On symbolise "x aime y" par : "$A(x,y)$". "Roméo aime Juliette" s'écrit $A(r, j)$; "x aime Juliette" s'écrit $A(x, j)$.

"Quelqu'un aime Juliette" peut s'écrire : "Il existe x tel que x aime Juliette" ou encore "Il existe x tel que $A(x, j)$" ce qu'on écrit :

$$\exists x,\ A(x, j)\,.$$

Comme précédemment, *la variable x ne figure pas dans cet énoncé* car elle est liée par le quantificateur $\exists$.

3. s'écrit :

$$\begin{array}{ll} & A(r, j) \\ \hline \exists x, & A(x, j) \end{array}$$

Symbolisons le prédicat "x est un ami de y" par $D(x, y)$.
2. s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \forall x, & D(x, a) \Rightarrow D(x, b) \\ & D(c, a) \Rightarrow D(c, b) \\ & \neg D(c, b) \Rightarrow \neg D(c, a) \\ & \neg D(c, b) \\ \hline & \neg D(c, a) \end{array}$$

3.1 Tautologies

On se donne

- un domaine d'individus qu'on note a, b, c, ...
- des variables x, y, z, ...
- des prédicats :
  - à 0 variable, notés : A_0, B_0, C_0, ...
  - à 1 variable, notés : $A_1(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$, ...
  - à 2 variables, notés : $A_2(x, y)$, $B_2(x, y)$, $C_2(x, y)$, ...
    etc.

3.1.1 Construction des énoncés :

1. Les prédicats à 0 variable sont des énoncés.
   Si $P_1(x)$ est un prédicat à une variable et si a est un individu, $P_1(a)$ est un énoncé.
   Si $P_2(x, y)$ est un prédicat à deux variables et si a et b sont des individus, $P_2(a, b)$ est un énoncé.
   Etc.

2. Si $\mathcal{A}$ est un énoncé, $\neg\mathcal{A}$ est un énoncé.
   Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des énoncés, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$. sont des énoncés.

[2] La proposition $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ s'appelle la *contraposée* de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$; elle lui est logiquement équivalente.

3. Si $\mathcal{A}(x)$ est l'assemblage obtenu en remplaçant dans un énoncé un individu par la variable x, les assemblages $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x)$ et $\exists x,\, \mathcal{A}\,(x)$ sont des énoncés.

Les énoncés obtenus à l'aide de la règle 1 s'appellent les *énoncés élémentaires.*

3.1.2 Systèmes de valeurs de vérité

Se donner un système de valeurs de vérité, c'est attribuer à chaque énoncé élémentaire une et une et une seule des valeurs V ou F.

Les tables de vérité des connecteurs propositionnels sont celles de la logique propositionnelle.

"Tables" de vérité de $\forall$ et de $\exists$:

- L'énoncé "$\forall x,\, \mathcal{A}\,(x)$ est vrai si seulement si l'énoncé $\mathcal{A}\,(d)$ est vrai pour tout individu d.
- L'énoncé "$\exists x,\, \mathcal{A}\,(x)$ est vrai si seulement si il existe au moins un individu d tel que $\mathcal{A}\,(d)$ est vrai.

Par un raisonnement par récurrence analogue à celui de la logique propositionnelle, on démontre que la donnée d'un système de valeurs de vérité et l'application des tables de vérité des connecteurs propositionnels et de $\forall$ et $\exists$ permet d'associer à chaque énoncé une et une seule des deux valeurs de vérité V et F.

Définition 4 *Un énoncé est une* tautologie *s'il a la valeur V quel que soit le système de valeurs de vérité.*

Les tautologies établies en calcul propositionnel sont encore des tautologies.

Un *énoncé* $\mathcal{A}\,(x)$ *à une variable libre* est l'assemblage obtenu en remplaçant dans un énoncé un individu par une variable x.

Alors, si d est un individu, $\mathcal{A}\,(d)$, $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x)$ et $\exists x,\, \mathcal{A}\,(x)$ sont des énoncés.

Un *énoncé* $\mathcal{A}(x,\, y)$ *à 2 variables libres* est l'assemblage obtenu en remplaçant dans un énoncé deux individus distincts par deux variables distinctes x et y.

Alors, si c et d sont des individus,

- $\mathcal{A}\,(c,\, d)$ et $\mathcal{A}\,(d,\, d)$ sont des énoncés,
- $\mathcal{A}\,(x,\, d)$ et $\mathcal{A}\,(c,\, y)$ sont des énoncés à une variable libre,
- $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, d)$, $\forall y,\, \mathcal{A}\,(c,\, y)$, $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, x)$, $\exists x,\, \mathcal{A}\,(x,\, d)$, $\exists y,\, \mathcal{A}\,(c,\, y)$, $\exists x,\, \mathcal{A}\,(x,\, x)$ sont des énoncés,
- $\forall y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$[3], $\exists y \forall x, \mathcal{A}\,(x,\, y)$, $\forall x \forall y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$, $\exists x \forall y, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ sont des énoncés,
- $\forall y \exists x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$, $\exists y \exists x, \mathcal{A}\,(x,\, y)$, $\forall x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$, $\exists x \exists y, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ sont des énoncés.

On définit de la même façon les énoncés à 3 variables libres, etc.

[3] En fait : $\forall y,\, (\forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y))$.

Exemple 3 *L'énoncé suivant traduit que la limite d'une suite (u_n) en $+\infty$ est égale à ℓ :*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, \underbrace{n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}_{\mathcal{A}(\varepsilon,N,n)}$$

Il est de la forme $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N},\, \mathcal{A}\,(\varepsilon,\, N,\, n)$ où $\mathcal{A}$ est un énoncé à 3 variables libres.

3.1.3 Liste de tautologies

$\forall x,\, \mathcal{A}\,(x) \Leftrightarrow \forall y,\, \mathcal{A}\,(y)$ (x : variable muette ou liée) ;
$\exists x,\, \mathcal{A}\,(x) \Leftrightarrow \exists y,\, \mathcal{A}\,(y)$ (idem) ;
$\mathcal{A}\,(d) \Rightarrow \exists x,\, \mathcal{A}\,(x)$;
$\forall x,\, \mathcal{A}\,(x) \Rightarrow \mathcal{A}\,(d)$;
$\forall y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y) \Leftrightarrow \forall x \forall y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$;
$\exists y \exists x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y) \Leftrightarrow \exists x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$;
$\neg \forall x,\, \mathcal{A}\,(x) \Leftrightarrow \exists x,\, \neg \mathcal{A}\,(x)$;
$\neg \exists x,\, \mathcal{A}\,(x) \Leftrightarrow \forall x,\, \neg \mathcal{A}\,(x)$.

Exemple 4 *La négation de $\forall x \exists y, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ est $\exists x \forall y,\, \neg \mathcal{A}\,(x,\, y)$. La négation de l'énoncé précédent ("la limite de la suite (u_n) est égale à ℓ") est donc*

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N},\, n > N \wedge |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Ordre et quantificateurs Considérons les énoncés :

(1) $\exists y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y) \Rightarrow \forall x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$;

(2) $\forall x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y) \Rightarrow \exists y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$.

- (1) est une tautologie : considérons un système de valeurs de vérité tel que $\exists y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ est vrai. Il existe au moins un individu d tel que $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, d)$ est vrai. Alors pour tout individu c, $\mathcal{A}\,(c,\, d)$ est vrai. Soit b un individu (quelconque). Ce qui précède montre que $\mathcal{A}\,(b,\, d)$ est vrai et donc que $\exists y,\, \mathcal{A}\,(b,\, y)$ est vrai. Par suite, $\forall x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ est vrai. Ceci prouve que pour tout système de valeurs de vérité, l'implication (1) est vraie.
- Étude de (2)
  On prend pour ensemble d'individus l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, n, $n+1$, ...

  $\mathcal{A}\,(x,\, y)$ signifie $x < y$. Soit p un entier. Si $q = p + 5$ on a $p < q$, par suite $\exists y,\, \mathcal{A}\,(p,\, y)$ est vrai. Par conséquent $\forall x \exists y,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ est vrai. Supposons que $\exists y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ soit vrai. Alors il existe un entier m tel que $\forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, m)$est vrai. En particulier $\mathcal{A}\,(m+1,\, m)$ est vrai donc : $m + 1 < m$: contradiction. Donc $\exists y \forall x,\, \mathcal{A}\,(x,\, y)$ est faux. Donc pour ce système de valeurs de vérité, l'implication (2) est fausse : ce n'est pas une tautologie.

La théorie de la déduction sous hypothèse reste valable en logique des prédicats (ainsi que la notion de théorie axiomatique) comme en logique propositionnelle.