PCSI - mathématiques

Géométrie affine

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$.

1 Espaces affines

E est un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 1 *Un* espace affine *sur E est un couple $(\mathcal{E}, \Omega)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide et Ω une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans E notée*

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & E \times E & \to & E \\ & (X, Y) & \mapsto & \Omega(X, Y) = \overrightarrow{XY} \end{array}$$

vérifiant

(1) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ *(relation de* Chasles*) pour tous X, Y, $Z \in \mathcal{E}$;*

(2) *pour tous $A \in \mathcal{E}$, $x \in E$,* il existe *un* unique *$X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AX} = x$.*

On note $A+x$ l'unique point X désigné par (2) ("notation point + vecteur").

Selon l'usage, les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés *points*, ceux de l'espace vectoriel sous-jacent E étant appelés *vecteurs*. Ce n'est pas une définition intrinsèque comme le montre l'exemple suivant (fondamental) :

Exemple 1 *Structure affine canonique d'un $\mathbb{R}$-ev*

Sur le $\mathbb{R}$-ev E on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & E \times E & \to & E \\ & (X, Y) & \mapsto & \overrightarrow{XY} = Y - X \end{array}$$

pour laquelle on vérifie aisément les propriétés (1) et (2).

L'application Ω définit la *structure canonique d'espace affine* du $\mathbb{R}$-ev E. Ainsi, tout espace vectoriel peut être considéré canoniquement comme un espace affine. On peut se demander si l'inverse est possible. La réponse est positive, mais le choix n'est plua canonique, voir § 1.3.

Dans toute la suite, $\mathcal{E}$ est un espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev E.

1.1 Règles de calcul

On a, pour tous X, Y, ... $\in \mathcal{E}$:

- $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{XY} = \vec{0} \Leftrightarrow X = Y$;
- $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$;
- $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AY} - \overrightarrow{AX}$;
- $\sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{X_i X_{i+1}} = \overrightarrow{X_1 X_n}$.

1.2 Repère affine

Définition 2 *Un* repère affine *de $\mathcal{E}$ est un couple $\mathcal{R} = (O\ ;\ \mathcal{U})$ où O est un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$ une base du $\mathbb{R}$-ev E.*

Si $X \in \mathcal{E}$, les *coordonnées de X dans $\mathcal{R}$* sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OX}$ dans $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \le i \le n}$, càd l'unique famille $\left(x^i\right)_{1 \le i \le n}$ de réels telle que $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^n x^i u_i$, ce qu'on écrit :

$$X = O + \sum_{i=1}^n x^i u_i.$$

Si $X, Y \in \mathcal{E}$ et si $X = O + \sum_{i=1}^n x^i u_i$, $Y = O + \sum_{i=1}^n y^i u_i$ alors

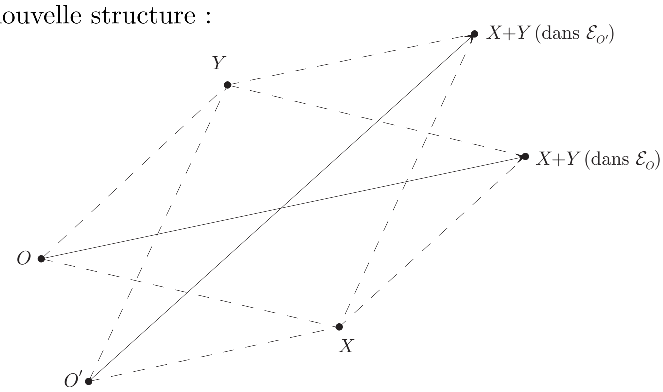
$$\overrightarrow{XY} = \sum_{i=1}^n \left(y^i - x^i\right) u_i.$$

1.3 Vectorialisé

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur E. Soit $O \in \mathcal{E}$. On munit $\mathcal{E}$ d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe . définies par

$$X + Y = O + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} \text{ et } \lambda.X = O + \lambda\overrightarrow{OX}$$

Il est immédiat que ces deux lois font de $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-ev noté $\vec{\mathcal{E}}_O$: le *vectorialisé de $\mathcal{E}$ en O*. Les lois définies dépendent du point O qui joue le rôle de "vecteur nul" pour cette nouvelle structure :



On peut donc résumer ainsi la différence essentielle entre les structures d'espace affine et d'espace vectoriel :

- Dans un espace vectoriel E, un certain vecteur joue un rôle particuler : le vecteur nul 0_E. Que l'on oublie son statut spécial, et l'on se retrouve avec un espace affine (exemple 1). Ceci ne nécessite aucun *choix*.
- Dans un espace affine en revanche, tout les points jouent le même rôle. Si l'on choisit un point O particulier en décidant qu'il "est" le vecteur nul, on se retrouve avec une structure d'espace vectoriel (le vectorialisé en O). Mais ce sens n'est pas *canonique* (il faut *désigner* un point *privilégié*).

2 Sous-espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev E et soient $A \in \mathcal{E}$ et V un sev de E. On pose

$$\mathcal{V} = A + V = \{A + x \mid x \in V\}.$$

Définition 3 *$\mathcal{V}$ est* la sous-variété affine (*ou : le sous-espace affine*) *de $\mathcal{E}$ passant par A est de direction V.*

Il est immédiat que $A \in \mathcal{V}$, et que par conséquent $\mathcal{V} \neq \varnothing$.
La *dimension* de $\mathcal{V}$ est $\dim \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}} V$, dimension de sa direction V.
Il est légitime de parler de *la* direction d'une sva d'après le résultat suivant :

Proposition 1 *Si $\mathcal{V}$ est la sous-variété affine de $\mathcal{E}$ passant par A est de direction V alors*

$$V = \left\{\overrightarrow{AX} \mid X \in \mathcal{V}\right\} = \left\{\overrightarrow{XY} \mid X \in \mathcal{V},\, Y \in \mathcal{V}\right\}.$$

On voit donc que la direction V de $\mathcal{V}$ est entièrement déterminée par $\mathcal{V}$. La réciproque est fausse ; deux sva de même direction ne sont par nécessairement égales, elles sont dites *parallèles.*
En outre, le point A de la définition ne joue aucun rôle particulier, contrairement à l'apparence. En effet, si $\mathcal{V} = A + V$ alors pour tout $B \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ est aussi la sva de $\mathcal{E}$ passant par B et dirigée par V.

Exemple 2

1. *$\mathcal{E}$ est une sva de lui-même (de direction E) ;*
2. *Tout singleton $\{A\}$ est une sva de $\mathcal{E}$ (de direction $\left\{\vec{0}\right\}$) ;*
3. *Les solutions d'un système linéaire compatible forment une sva de l'espace des inconnues, dont la direction est le sev des solutions du système homogène ;*
4. *Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre k forment une sva de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ dirigée par l'espace des solutions de l'équation homogène.*

2.1 Intersection de sva

L'intersection de deux sva (ou plus généralement d'un nombre quelconque de sva) est une sva, *à une exception près* :

Proposition 2 *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux sva de $\mathcal{E}$ de directions respectives V et W. Si $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ est une sva de $\mathcal{E}$ de direction $V \cap W$.*

2.2 Sva engendrée

Soient $p \in \mathbb{N}$ et A_0, ..., A_p $(p+1)$ points de $\mathcal{E}$.

Lemme 1 *L'ensemble des sva de $\mathcal{E}$ contenant A_0, ..., A_p admet un plus petit élément (modulo $\subset$).*

Définition 4 *C'est* la *sva de $\mathcal{E}$* engendrée *par A_0, ..., A_p notée $(A_0 ... A_p)$.*

On peut décrire $\mathcal{V} = (A_0 ... A_p)$: c'est $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_p} \right\rangle$ (où le point A_0 peut être remplacé par n'importe lequel des autres points). En particulier, $\dim (A_0 ... A_p) \leq p$.

Exemple 3

1. *$(A) = \{A\}$;*
2. *$(AB) = \left\{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ est le singleton $\{A\}$ si $A = B$; sinon c'est une droite,* la *droite passant par A et B.*
3. *$(ABC) = \left\{A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$ se ramène aux cas précédents si A, B et C sont alignés, sinon c'est un plan contenant A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:* le *plan passant par A, B et C.*

3 Applications affines

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines (càd, espaces affines attachés à deux $\mathbb{R}$-ev E et F). Soient f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Définition 5 *L'application f est* affine *s'il existe une application linéaire $\varphi \in L_{\mathbb{R}}(E, F)$ telle que*

$$\overrightarrow{f(X)\, f(Y)} = \varphi\left(\overrightarrow{XY}\right)$$

pour tous X, $Y \in \mathcal{E}$.

Lemme 2 *L'application φ est alors* unique.

Définition 6 *φ est la* partie linéaire *de f notée*

$$\varphi = L(f).$$

On note en particulier les relations, valables pour tous A, $X \in \mathcal{E}$, $x \in E$:

$$f(A + x) = f(A) + \varphi(x) \; ; \; f(X) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{AX}\right).$$

Ces formules signifient que pour connaître une application affine, il ne suffit pas de connaître sa partie linéaire. Il faut en outre donner l'image d'un point (quelconque) par cette application.

Exemple 4

1. *Si f est constante, f est affine et $L(f) = 0_{L(E,F)}$ (application nulle) ;*
2. *$(\mathcal{E} = \mathcal{F})$ Si $a \in E$,* la translation de vecteur *a est*

   $$t_a : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \; ; \; X \mapsto X + a$$

   t_a est affine et $L(t_a) = \mathrm{Id}_E$.
3. *$(\mathcal{E} = \mathcal{F})$ Si $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'*homothétie de centre A et de rapport λ *est*

   $$h_{A,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \; ; \; X \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AX}$$

   $h_{A,\lambda}$ est affine et $L(h_{A,\lambda}) = \lambda \mathrm{Id}_E$ (homothétie vectorielle de rapport λ).

3.1 Expression dans un repère

Munissons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de repères affines $\mathcal{R} = (O\ ;\ \mathcal{U})$ et $\mathcal{R}' = (O'\ ;\ \mathcal{V})$ et considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui associe à un point X de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\left(x^j\right)_{1\leq j\leq p}$ dans $\mathcal{R}$ le point Y de $\mathcal{F}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ sont $\left(y^i\right)_{1\leq i\leq n}$, avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} y^1 & = & a_{1,1}x^1 + ... + a_{1,p}x^p + b^1 \\ \vdots & & \\ y^n & = & a_{n,1}x^1 + ... + a_{n,p}x^p + b^n \end{array}\right.$$

Ceci peut se résumer par l'écriture matricielle

$$Y = AX + B$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

et A est la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On a bien sûr $f(O) = B$. Il est alors immédiat de vérifier que si $\varphi \in L_{\mathbb{R}}(E, F)$ est définie par $\mathrm{mat}(\varphi\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) = A$, les relations ci-dessus correspondent à l'écriture vectorielle

$$f(X) = f(O) + \varphi\left(\overrightarrow{OX}\right)$$

autrement dit : f est l'(unique) application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $f(O) = B$ et $L(f) = \varphi$.

On peut ainsi reconnaître une application affine directement sur son expression analytique.

3.2 Composition d'applications affines

La composée de deux applications affines est encore une application affine. Plus précisément :

Proposition 3 *Si f (*resp. *g) est une application affine de l'espace affine $\mathcal{E}$ (*resp. *$\mathcal{F}$) dans l'espace affine $\mathcal{F}$ (*resp. *$\mathcal{G}$) alors $g \circ f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{G}$ et :*

$$L(g \circ f) = L(g) \circ L(f).$$

3.3 Applications affines bijectives

Les propriétés d'une application affine sont, pour l'essentiel, déterminées par celles de sa partie linéaire.

Proposition 4 *Soient f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ et φ sa partie linéaire.*

1. *f est injective* ssi *φ est injective ;*
2. *f est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$* ssi *φ est une surjection de E sur F ;*
3. *f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$* ssi *φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de E sur F.*

Dans ce dernier cas on peut préciser :

Proposition 5 *Soit f une application affine bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$, et soit φ sa partie linéaire. Alors $f^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$ et :*

$$L\left(f^{-1}\right) = \varphi^{-1} = (L(f))^{-1}.$$

On donne un nom à l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ lui-même :

Notation 1 *Le* groupe affine *de $\mathcal{E}$ est*

$$\mathcal{GA}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ affine} \mid f \text{ bijection de } \mathcal{E}\}.$$

Il est en effet immédiat que $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ est un groupe pour $\circ$ (sg du groupe de toutes les bijections de $\mathcal{E}$).

4 Barycentres

Soit $\mathcal{E}$ espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev E.

Soient $(A_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $\left(\lambda^i\right)_{1\leq i\leq p}$ une famille de réels ($p \in \mathbb{N}^*$).

Lemme 3 *Notons $\lambda = \sum_{i=1}^p \lambda^i$.*

1. *Si $\lambda = 0$, le vecteur $\sum_{i=1}^p \lambda^i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point $M \in \mathcal{E}$.*
2. *Si $\lambda \neq 0$,* il existe *un* unique *point $G \in \mathcal{E}$ vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda^i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}. \tag{1}$$

Définition 7 *Le point G en question est le* barycentre de la famille de points pondérés $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1\leq i\leq p}$.

Il est important de noter que G n'est défini que si $\lambda \neq 0$.

Dans le cas particulier où tous les λ^i valent 1, G est appelé *isobarycentre* (ou *centre de gravité*) de $(A_i)_{1\leq i\leq p}$.

Pour déterminer G on peut introduire, grâce à la relation de Chasles, une origine O arbitraire dans (1) d'où

$$\lambda \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{p} \lambda^i \overrightarrow{OA_i} \tag{2}$$

puis fixer $O = A_1$ (ou n'importe lequel des autres points). $O = G$ redonne (1). Comme $\lambda \neq 0$ (2) peut s'écrire

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda^i}{\lambda} \overrightarrow{OA_i}$$

ce qui rend pertinente la notation parfois utilisée :

Notation 2 $G = \sum_{i=1}^p \lambda^i * A_i$.

On peut également déterminer les coordonnées de G : si $A_i = O + \sum_{j=1}^n x_i^j u_j$ (coordonnées dans un repère affine $\mathcal{R}$) alors $G = O + \sum_{j=1}^n g^j u_j$ où pour $j = 1, ..., n$:

$$g^j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda^i}{\lambda} x_i^j$$

autrement dit "la $j^{\text{ème}}$ coordonnée du barycentre est le barycentre des $j^{\text{èmes}}$ coordonnées".

Le résultat suivant permet de calculer progressivement les barycentres.

Théorème 1 (associativité barycentrique) *Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n+p}$ une famille de points de l'espace affine $\mathcal{E}$. Soit $\left(\lambda^i\right)_{1 \leq i \leq n+p}$ une famille de réels telle que $\lambda = \sum_{i=1}^{n+p} \lambda^i \neq 0$, $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \neq 0$, $\nu = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda^i \neq 0$. Notons G le barycentre de $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq n+p}$, M le barycentre de $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ et N le barycentre de $\left(A_i, \lambda^i\right)_{n+1 \leq i \leq n+p}$. Alors*

$$G \text{ est le barycentre de } \left((M, \mu), (N, \nu)\right).$$

4.1 Barycentres et sva

Soit $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda^i \neq 0$. Soit G le barycentre de $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$.

Proposition 6 *Si pour $i = 1$, ..., p, A_i appartient à une sva $\mathcal{V}$ de $\mathcal{E}$ alors : $G \in \mathcal{V}$.*

En particulier, G appartient à la sva $(A_1 ... A_p)$ engendrée par A_1, ..., A_p. Notamment :

- tout barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB) ;
- tout barycentre de trois points A, B, C appartient au plan (ABC) etc.

La remarque précédente fournit en fait une caractérisation de la sva engendrée :

Théorème 2 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et A_1, ..., A_p p points de $\mathcal{E}$. Alors la sva de $\mathcal{E}$ engendrée par A_1, ..., A_p est l'ensemble des barycentres de la famille $(A_1, ..., A_p)$:*

$$(A_1 ... A_p) = \left\{ \sum \lambda^i * A_i \mid \lambda = \sum \lambda^i \neq 0 \right\}.$$

4.2 Barycentres et applications affines

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Soit $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda^i \neq 0$.

Proposition 7 *Si G est le barycentre de $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$, $f(G)$ est le barycentre de $\left(f(A_i), \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$.*

Autrement dit, “l'image du barycentre (par une application affine) est le barycentre des images”.
Ici encore, une réciproque existe :

Théorème 3 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Si pour toute famille $\left(A_i, \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ de barycentre G, $f(G)$ est le barycentre de $\left(f(A_i), \lambda^i\right)_{1 \leq i \leq p}$ alors :*

$$f \text{ est affine.}$$

Ainsi la notion de barycentre permet de caractériser les notions affines fondamentales.