PCSI - mathématiques

Fractions rationnelles

Le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$

On admet qu'il existe un corps, noté $\mathbb{K}(X)$, contenant l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes et le plus petit possible (mod $\subset$) à avoir cette propriété. $\mathbb{K}(X)$ est à $\mathbb{K}[X]$ ce que $\mathbb{Q}$ est à $\mathbb{Z}$. On a en particulier

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{A}{B} \mid A \in \mathbb{K}[X], B \in \mathbb{K}[X] - \{0\} \right\}.$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés *fractions rationnelles* (à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$).

1.1 Degré

Soit $F \in \mathbb{K}(X) - \{0\}$.

Lemme 1 *Si $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ alors*

$$\deg A_1 - \deg B_1 = \deg A_2 - \deg B_2.$$

Preuve. $A_1 B_2 = B_1 A_2$ et on prend les degrés. ■

Le lemme permet de poser :

Définition 1 *Si $F \in \mathbb{K}(X) - \{0\}$, le* degré *de F est*

$$\deg F = \deg A - \deg B$$

si $F = \frac{A}{B}$, A, $B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$.

Le degré d'une fraction rationnelle est donc un entier *relatif.* On convient que $\deg 0 = -\infty$.

1.2 Partie entière

Proposition 1 *Si $F \in \mathbb{K}(X)$ il existe un unique couple $(E, F_0) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que :*

1. $F = E + F_0$;
2. $\deg F_0 < 0$.

E est la *partie entière* de F.

Remarque 1 *Si $F = \frac{A}{B}$, A, $B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$, E est le* quotient de la division euclidienne *de A par B.*

1.3 Représentant normalisé

Un *représentant irréductible* de $F \in \mathbb{K}(X) - \{0\}$ est un couple (A, B) de polynômes ($B \neq 0$) *sans facteur commun* tels que $F = \frac{A}{B}$. Les représentants irréductibles d'une fraction F se déduisent l'un de l'autre par multiplication par une constante non nulle.

Si de plus B est *unitaire* le représentant est dit *normalisé.* Le représentant normalisé d'une fraction rationnelle est unique.

On convient que le représentant normalisé de la fraction nulle est $(0, 1)$.

1.4 Pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \frac{A}{B}$ (A, $B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$) normalisée. Soit $x \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

Définition 2

1. *x est* pôle *de F si x est racine de B.*
2. *x est* pôle d'ordre *m de F si x est racine d'ordre m de B.*

- $m = 1$: on dit que x est *pôle simple ;*
- $m = 2$: x est *pôle double* etc.

On peut aussi considérer les pôles de F dans $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ (par exemple, les pôles complexes d'une fraction réelle).

1.5 Fonctions rationnelles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Soit $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$. Notons $\mathcal{D}(F, \mathbb{L}) = \{x \in \mathbb{L} \mid B(x) \neq 0\}$ si $F = \frac{A}{B}$ normalisée (A, $B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$). $\mathcal{D}(F, \mathbb{L})$ est donc l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}$ qui *ne* sont *pas* pôles de F.

On définit alors :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F} : \mathcal{D}(F, \mathbb{L}) & \to & \mathbb{L} \\ x & \mapsto & F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \end{array}$$

fonction rationnelle associée à F.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{L}$ tel que les expressions suivantes aient un sens :

- $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$;
- $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$;
- $(FG)(x) = F(x) G(x)$.

2 Dérivation sur $\mathbb{K}(X)$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Lemme 2 *Si* $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ *(*A_i*,* $B_i \in \mathbb{K}[X]$*,* $B_i \neq 0$*) alors*

$$\frac{A_1' B_1 - A_1 B_1'}{B_1^2} = \frac{A_2' B_2 - A_2 B_2'}{B_2^2}.$$

Preuve. $A_1 B_2 = B_1 A_2$. On dérive dans $\mathbb{K}[X]$: $A_1' B_2 + A_1 B_2' = B_1' A_2 + A_1 B_2'$. On multiplie par $B_1 B_2$:

$$A_1' B_1 B_2^2 + \underbrace{A_1 B_2}_{=A_2 B_1} B_1 B_2' = B_1' \underbrace{B_1 A_2}_{=A_1 B_2} B_2 + \underbrace{A_1 B_2}_{=A_2 B_1} B_1 B_2'$$

soit $A_1' B_1 B_2^2 + A_2 B_2' B_1^2 = B_1' A_1 B_2^2 + A_2 B_2' B_1^2$. On conclut en regroupant les termes en B_1^2 et B_2^2 et en divisant par $B_1^2 B_2^2$ dans $\mathbb{K}(X)$. ■

Le lemme permet de poser :

Définition 3 *Si* $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *(*P*,* $Q \in \mathbb{K}[X]$*,* $Q \neq 0$*), la* fraction dérivée *de* F *est*

$$D(F) = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

On montre alors :

Théorème 1

1. *D est une* dérivation[1] *de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$;*
2. *La restriction de D à $\mathbb{K}[X]$ est la dérivation canonique de $\mathbb{K}[X]$.*

Notation 1 $F' = D(F)$*,* $F'' = D^2(F)$*,* $F''' = D^3(F)$*, ...,* $F^{(n)} = D^n(F)$*.*

Proposition 2 *Si* F*,* $G \in \mathbb{K}(X)$ *(*$G \neq 0$*) :*

1. $D\left(\frac{1}{F}\right) = -\frac{F'}{F^2}$ *;*
2. $D\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{D(F)G - FD(G)}{G^2}$*.*

Remarque 2 *Si a n'est pas un pôle de F, a n'est pas non plus pôle de F'.*

2.1 Dérivées successives de $\frac{1}{X-a}$ et $\frac{1}{(X-a)^p}$

Remarque 3 $D\left(\frac{1}{F^n}\right) = -\frac{nF'}{F^{n+1}}$*.*

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$D^n\left(\frac{1}{X-a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(X-a)^{n+1}}.$$

Pour calculer $D^n\left(\frac{1}{(X-a)^p}\right)$ on part de la relation $D^{p-1}\left(\frac{1}{X-a}\right) = \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(X-a)^p}$ d'où

$$\begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{(X-a)^p}\right) &= \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} D^{n+p-1}\left(\frac{1}{X-a}\right) \\ &= \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{(-1)^{n+p-1}(n+p-1)!}{(X-a)^{n+p}} \end{aligned}$$

soit

$$D^n\left(\frac{1}{(X-a)^p}\right) = \frac{(-1)^n (n+p-1)!}{(p-1)!\,(X-a)^{n+p}}.$$

[1] D est donc un endomorphisme de $\mathbb{K}$-ev de $\mathbb{K}(X)$ et en outre

$$D(FG) = D(F)\,G + F\,D(G)$$

quelles que soient les fractions rationnelles F et G.

3 Décomposition des fractions en éléments simples

3.1 Théorème général d'existence

Théorème 2 *Si* $F \in \mathbb{K}(X)$*,* $F = \frac{P}{Q}$ *(*P*,* $Q \in \mathbb{K}[X]$*,* $Q \neq 0$*) normalisée,* $Q = Q_1^{m_1} ... Q_p^{m_p}$ *décomposé en produit de facteurs premiers dans* $\mathbb{K}[X]$*,* F *s'écrit de manière unique :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{N_{i,j}}{Q_i^j}$$

où E*,* $N_{i,j}$*,* $Q_i \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\forall i \forall j$ $\deg N_{i,j} < \deg Q_i$*.*

Le terme $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{N_{i,j}}{Q_i^j}$ s'appelle la *partie polaire* relative à Q_i.

Remarque 4 *E est la partie entière de F.*

3.2 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

3.2.1 Ecriture du théorème

Théorème 3 *Si* $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a_1)^{m_1} ... (X-a_p)^{m_p}}$ *(*P*,* $Q \in \mathbb{C}[X]$*,* $Q \neq 0$*),* F *s'écrit de manière unique :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ *et* $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$*.*

3.2.2 Pratique

Partie entière On effectue la division euclidienne de P par Q. On supposera cette partie du calcul effectuée dans la suite.

Méthode par identification (cas très simples !)

Exemple 1 $F = \frac{1}{(X^2-1)}$

$F = \frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} = \frac{(a+b)X + a - b}{X^2-1}$ d'où par identification $a + b = 0$ et $a - b = 1$ puis $a = -b = \frac{1}{2}$.

Pôle simple $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)Q_1}$ (P, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$) où $Q_1(a) \neq 0$. On écrit $F = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{P_1}{Q_1}$ et $(X-a)F = \frac{P}{Q_1} = \lambda + (X-a)\frac{P_1}{Q_1}$ d'où

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \widetilde{(X-a)F}(X)(a).$$

Exemple 2 $F = \frac{1}{X(X-1)(X-2)}$

$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}$ avec $a = \widetilde{XF}(X)(0) = \frac{1}{-1.(-2)} = \frac{1}{2}$, $b = \widetilde{(X-1)F}(X)(1) = \frac{1}{1.(-1)} = -1$ et $c = \widetilde{(X-2)F}(X)(2) = \frac{1}{2.1} = \frac{1}{2}$.

Remarque 5 $Q = (X-a)Q_1$ *donc* $Q' = Q_1 + (X-a)Q_1'$ *et* $Q'(a) = Q_1(a)$ *donc aussi :*

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Exemple 3 $F = \frac{1}{X^n-1}$

$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega^k\right)$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega^k}$ où $\lambda_k = \frac{1}{n(\omega^k)^{n-1}} = \frac{\omega^k}{n}$ (puisque $\left(\omega^k\right)^n = 1$).

Pôle multiple $F=\frac{P}{Q}=\frac{P}{(X-a)^m Q_1}$ où $Q_1(a)\neq 0$.
$F=\frac{\lambda_1}{X-a}+\frac{\lambda_2}{(X-a)^2}+...+\frac{\lambda_m}{(X-a)^m}+\frac{P_1}{Q_1}$. La méthode précédente ne permet que de calculer λ_m : $(X-a)^m F(X)=\frac{P(a)}{Q_1(a)}=\lambda_1(X-a)^{m-1}+...+\lambda_{m-1}(X-a)+\lambda_m+(X-a)^m\frac{P_1}{Q_1}$ d'où

$$\lambda_m=\frac{P(a)}{Q_1(a)}=\widetilde{(X-a)^m}F(X)(a).$$

Mais si l'on multiplie par $(X-a)^n$, $n<m$, a reste un pôle et on ne peut le substituer.

Cas 1 *m "petit" (2 ou 3 en pratique)*
Il reste à calculer 1 ou 2 coefficients. On substitue une ou deux valeurs "simples" pour terminer le calcul.

Exemple 4 $F=\frac{1}{(X-1)^2(X-2)}$.

$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-2}$ et $b=\widetilde{(X-1)^2}F(X)(1)=-1$; $c=\widetilde{(X-2)}F(X)(2)=1$ puis $F(0)=-\frac{1}{2}=-a+b-\frac{c}{2}$ d'où $a=\frac{1}{2}+b-\frac{c}{2}=-1$.

Cas 2 *m "grand"*
$F=\frac{P}{Q}=\frac{P}{(X-a)^m Q_1}=\frac{\lambda_1}{X-a}+\frac{\lambda_2}{(X-a)^2}+...+\frac{\lambda_m}{(X-a)^m}+\frac{P_1}{Q_1}$. On définit $F_1=(X-a)^m F=\lambda_1(X-a)^{m-1}+...+\lambda_{m-1}(X-a)+\lambda_m+(X-a)^m\frac{P_1}{Q_1}$ que l'on dérive avec la formule de Leibniz pour obtenir

$$F_1^{(k)}(a)=k!\lambda_{m-k}\ ;\ k=0,\ ...,\ m-1.$$

Preuve. $F_1=\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_{m-i}(X-a)^i+(X-a)^m\frac{P_1}{Q_1}$. On dérive k fois pour $0\leq k\leq m-1$:

$$\begin{aligned}F_1^{(k)} &= \sum_{i=0}^{m-1}\lambda_{m-i}\underbrace{D^k\left((X-a)^i\right)}_{=0\text{ si }k>i}\\ &\quad+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}D^p\left((X-a)^m\right)D^{k-p}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)\\ &= \sum_{i=k}^{m-1}\lambda_{m-i}\frac{i!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}\\ &\quad+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\frac{m!}{(m-p)!}(X-a)^{m-p}D^{k-p}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)\end{aligned}$$

et lorsqu'on substitue a, il ne reste que le seul terme non facteur de $(X-a)$ càd le terme pour $i=k$ dans la première somme, qui vaut $k!\lambda_{m-k}$. ■

Exemple 5 $F=\frac{X^3-X+5}{(X-1)^6(X+2)}$

$F=\frac{a_1}{X-1}+...+\frac{a_6}{(X-1)^6}+\frac{b}{X+2}$. $b=\widetilde{(X+2)}F(X)(-2)=-\frac{1}{3^6}=-\frac{1}{729}$. $F_1=(X-1)^6F=\frac{X^3-X+5}{X+2}=X^2-2X+3-\frac{1}{X+2}$ (par division euclidienne, pour faciliter les dérivations). $F_1'=2X-2+\frac{1}{(X+2)^2}$, $F_1''=2-\frac{2}{(X+2)^3}$ et pour $k\geq 3$, $F_1^{(k)}=\frac{(-1)^{k+!}k!}{(X+2)^{k+1}}$ donc alors $\frac{1}{k!}F_1^{(k)}=a_{6-k}=\frac{(-1)^{k+!}}{3^{k+1}}$: $a_1=\frac{1}{729}$, $a_2=-\frac{1}{243}$, $a_3=\frac{1}{81}$, $a_4=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$, $a_5=\frac{1}{9}$ et $a_6=\frac{5}{3}$.

Méthodes complémentaires

Relation des résidus : si $\deg F<0$, $x\tilde{F}(x)$ a une limite finie en $\pm\infty$ et $XF(X)=\frac{\lambda_{1,1}X}{X-a_1}+\frac{\lambda_{1,2}X}{(X-a_1)^2}+...+\frac{\lambda_{p,1}X}{X-a_p}+...+\frac{\lambda_{p,m_p}X}{(X-a_p)^{m_p}}$ d'où

$$\lim_{\pm\infty}x\tilde{F}(x)=\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1}+...+\lambda_{p,1}\qquad(1)$$

ce qui permet de calculer le dernier $\lambda_{i,1}$ si l'on a calculé tous les autres.

Exemple 6 *Retour sur l'exemple 2.*

$F=\frac{1}{X(X-1)(X-2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X-2}$ avec $a=\frac{1}{2}$ et $b=-1$ calculés ; la relation 1 s'écrit $\lim_{+\infty}x\tilde{F}(x)=0=a+b+c$ d'où $c=-a-b=\frac{1}{2}$.

Considérations de parité : Si $F(-X)=\pm F(X)$, la comparaison des décompositions de F et de $\pm F(-X)$ fournit des relations utiles entre les coefficients.

Exemple 7 $F=\frac{X^2+1}{X(X-1)^2(X+1)^2}$ *(impaire)*

$F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{(X-1)^2}+\frac{d}{X+1}+\frac{e}{(X+1)^2}$. $F(-X)=-\frac{a}{X}-\frac{b}{X+1}+\frac{c}{(X+1)^2}-\frac{d}{X-1}+\frac{e}{(X-1)^2}=-F(X)$ donc $d=b$ et $e=-c$ puis $a=\widetilde{XF(X)}(0)=1$, $c=\widetilde{(X-1)^2}F(X)(1)=\frac{1}{2}=-e$ et $\lim_{+\infty}x\tilde{F}(x)=0=a+b+d=1+2b$ donc $b=-\frac{1}{2}=d$.

Exemple 8 $F=\frac{X^2}{(X^2-1)^2}$ *(paire)*

$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}$. $F(-X)=-\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}-\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2}=F(X)$ donc $c=-a$ et $d=b=\widetilde{(X-1)}F(X)(1)=\frac{1}{4}$ puis $F(0)=0=-a+b+c+d=-2a+2b$ d'où $a=b=\frac{1}{4}=-c$.

Remarque 6 *Si F est paire, la relation des résidus ne donne rien de plus que la parité. Par contre, la substitution de 0 est toute indiquée s'il n'est pas un pôle.*

3.3 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

3.3.1 Ecriture du théorème

Théorème 4 *Si $F=\frac{P}{Q}$ normalisée (P, $Q\in\mathbb{R}[X]$, $Q\neq 0$), $Q=\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{l}\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{n_i}$ (décomposition en produit de facteurs premiers dans $\mathbb{R}[X]$), F s'écrit de manière unique :*

$$\begin{aligned}F &= E+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}\\ &\quad+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\alpha_{i,j}X+\beta_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}\end{aligned}$$

où $E\in\mathbb{R}[X]$, $\lambda_{i,j}$, $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}\in\mathbb{R}$.

Les termes $\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ (*resp.* $\frac{\alpha_{i,j}X+\beta_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}$) sont les *éléments simples de première* (*resp. seconde*) espèce.

3.3.2 Pratique

Partie entière (supposée calculée dans la suite)

Méthode par identification (cas très simples !)

Exemple 9 $F=\frac{1}{(X+1)(X^2+1)}$

$F=\frac{a}{X+1}+\frac{bX+c}{X^2+1}=\frac{(a+b)X^2+(b+c)X+a+c}{(X+1)(X^2+1)}$ d'où en identifiant $a+b=b+c=0$ et $a+c=1$ puis $a=-b=c=\frac{1}{2}$.

Eléments simples de *première espèce* On applique les méthodes vues sur $\mathbb{C}$.

Eléments simples de *seconde espèce*

Méthode 1 : On décompose dans $\mathbb{C}(X)$ et on regroupe les termes deux à deux conjugués

Exemple 10 $F=\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$

$F=\frac{1}{(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{j})(X-\mathrm{j}^2)}=\frac{a}{X-\mathrm{i}}+\frac{\bar{a}}{X+\mathrm{i}}+\frac{b}{X-\mathrm{j}}+\frac{\bar{b}}{X-\mathrm{j}^2}$ avec $a=\widetilde{(X-\mathrm{i})F}(X)(\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}.\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}$ et $b=\widetilde{(X-\mathrm{j})F}(X)(\mathrm{j})=\frac{1}{(\mathrm{j}^2+1)(\mathrm{j}-\mathrm{j}^2)}=\frac{1}{-\mathrm{j}(\mathrm{j}-\mathrm{j}^2)}=\frac{1}{1-\mathrm{j}^2}=\frac{1-\mathrm{j}}{(1-\mathrm{j}^2)(1-\mathrm{j})}=\frac{1-\mathrm{j}}{3}$. Finalement $F=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-\mathrm{i}}+\frac{1}{X+\mathrm{i}}\right)+\frac{1-\mathrm{j}}{3(X-\mathrm{j})}+\frac{1-\mathrm{j}^2}{3(X-\mathrm{j}^2)}=-\frac{X}{X^2+1}+\frac{X+1}{X^2+X+1}$.

Méthode 2 : On écrit la décomposition sur $\mathbb{R}$ à l'aide de coefficients indéterminés et on utilise des méthodes qui s'inspirent de celles vues sur $\mathbb{C}$. On peut évidemment substituer des valeurs complexes.

Exemple 11 $F=\frac{X+2}{(X+1)(X^2+1)}$

$F=\frac{a}{X+1}+\frac{bX+c}{X^2+1}$. $a=\widetilde{(X+1)F}(X)(-1)=\frac{1}{2}$; $b\mathrm{i}+c=\widetilde{(X^2+1)F}(X)(\mathrm{i})=\frac{\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}+1}=\frac{(\mathrm{i}+2)(-\mathrm{i}+1)}{(\mathrm{i}+1)(-\mathrm{i}+1)}=\frac{3-\mathrm{i}}{2}$ d'où $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$.

Exemple 12 $F=\frac{1}{X^4+1}$

$X^4+1=X^4+2X^2+1-2X^2=\left(X^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}X\right)^2=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)$. $F=\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$ est paire d'où $c=-a$ et $d=b$. Notons α une racine complexe de $X^2-\sqrt{2}X+1$: $\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1=0$. $a\alpha+b=\widetilde{\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)F}(X)(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha}$ or $1=\alpha\left(\sqrt{2}-\alpha\right)$ donc $\frac{1}{\alpha}=\sqrt{2}-\alpha$ d'où $a\alpha+b=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}$. Or comme α est un complexe *non réel*, α et 1 ne sont pas "colinéaires"[2] donc on peut identifier : $a=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{2}$.

Exemple 13 $F=\frac{3X^3+3X^2+5X+1}{X(X^2+X+1)^2}$

$F=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}+\frac{dX+e}{(X^2+X+1)^2}$. $a=\widetilde{XF}(X)(0)=1$. $d\mathrm{j}+e=\widetilde{(X^2+X+1)^2F}(X)(\mathrm{j})=\frac{3\mathrm{j}^3+3\mathrm{j}^2+5\mathrm{j}+1}{\mathrm{j}}=(2\mathrm{j}-2)\,\mathrm{j}^2=3-\mathrm{j}$ donc $d=-1$ et $e=3$. $\lim_{+\infty}x\tilde{F}(x)=0=a+b$ donc $b=-a=-1$. $F(-1)=4=-a-b+c-d+e$ donc $c=4+a+b+d-e=0$.

[2]Rigoureusement, la famille $(1,\alpha)$ est *libre* dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.

Cas compliqués : Présence d'un facteur irréductible de degré 2 à une puissance élevée (>2).

Cas 1 *Le dénominateur est de la forme Q^n (seul).*
On effectue des divisions euclidiennes successives.

Exemple 14 $F=\frac{X^4-1}{(X^2+X+1)^{1000}}$

On divise X^4-1 par X^2+X+1 : $X^4-1=\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-X\right)+X-1$. On divise encore[3] le quotient par $Q=X^2+X+1$: $X^2-X=\left(X^2+X+1\right).1+(-2X-1)$. Finalement $X^4-1=\left(X^2+X+1\right)^2+(-2X-1)\left(X^2+X+1\right)+X-1$. On divise par $\left(X^2+X+1\right)^{1000}$ pour obtenir la décomposition : $F=\frac{1}{(X^2+X+1)^{998}}+\frac{-2X-1}{(X^2+X+1)^{999}}+\frac{X-1}{(X^2+X+1)^{1000}}$.

Cas 2 *Tous les autres...*
On effectue un calcul de proche en proche selon la méthode illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 15 $F=\frac{1}{(X-1)(X-2)(X^2+1)^3}$

$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{cX+d}{X^2+1}+\frac{eX+f}{(X^2+1)^2}+\frac{gX+h}{(X^2+1)^3}$.
Pas de panique[4]. $a=\widetilde{(X-1)F}(X)(1)=-\frac{1}{8}$, $b=\widetilde{(X-2)F}(X)(2)=\frac{1}{125}$. $g\mathrm{i}+h=\widetilde{(X^2+1)^3F}(X)(\mathrm{i})=\frac{1}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}=\frac{1+3\mathrm{i}}{10}$ d'où $g=\frac{3}{10}$, $h=\frac{1}{10}$.
On soustrait alors de F la partie polaire que l'on vient de calculer. On obtient une fraction G dont le dénominateur comporte le facteur de degré 2 *à une puissance de moins*, ce qui permet de poursuivre le calcul.

$$\begin{aligned}
G &= F-\frac{gX+h}{\left(X^2+1\right)^3}\\
&= \frac{1}{(X-1)(X-2)\left(X^2+1\right)^3}-\frac{3X+1}{10\left(X^2+1\right)^3}\\
&= \frac{-3X+8}{10(X-2)(X-1)\left(X^2+1\right)^2}\\
&= \frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{cX+d}{X^2+1}+\frac{eX+f}{\left(X^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

On continue par le calcul de e et f : $e\mathrm{i}+f=\widetilde{(X^2+1)^2G}(X)(\mathrm{i})=\frac{-3\mathrm{i}+8}{10(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\frac{(-3\mathrm{i}+8)(1+3\mathrm{i})}{100}=\frac{17+21\mathrm{i}}{100}$ donc $e=\frac{21}{100}$, $f=\frac{17}{100}$.
Pour calculer les deux derniers coefficients on pourrait effectuer une autre étape identique à la précédente. Mais il est plus simple d'écrire la relation provenant de la limite en $+\infty$ de $x\tilde{F}(x)$: $\lim_{+\infty}x\tilde{F}(x)=0=a+b+c$ d'où $c=-a-b=\frac{1}{8}-\frac{1}{125}=\frac{117}{1000}$ et $F(0)=\frac{1}{2}=-a-\frac{b}{2}+d+f+h$ donc $d=\frac{1}{2}+a+\frac{b}{2}-f-h=\frac{109}{1000}$.

[3]Tant qu'il est de degré $\geq \deg Q$.

[4]Si ce type de fraction résulte de vos propres calculs, vérifiez-les. Sinon, demandez à l'examinateur s'il n'y a pas d'erreur sur l'exposant. Si ces méthodes échouent, restez calme et mettez en œuvre la technique illustrée dans le présent exemple.

PCSI - exercices de mathématiques

Fractions rationnelles

1 Décomposition des fractions en éléments simples

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+1}$; 2. $F(X)=\frac{1}{(X+1)(X^4+1)}$;
3. $F(X)=\frac{1}{X^6+1}$; 4. $F(X)=\frac{X}{X^4+X^2+1}$;
5. $F(X)=\frac{X^6}{(X^2+1)(X-1)^3}$; 6. $F(X)=\frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2}$;
7. $F(X)=\frac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3}$; 8. $F(X)=\frac{1}{X(X^2+X+1)^2}$;
9. $F(X)=\frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$.

Exercice 2

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X)=\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
2. $F(X)=\frac{1}{X^4-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$;
3. $F(X)=\frac{X^4+1}{(X^2-1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
4. $F(X)=\frac{1}{(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$;
5. $F(X)=\frac{X^2-3}{X^2(X^2-1)(X^2+1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
6. $F(X)=\frac{3X^7-5X^4+4X^2-11X+1}{(X^2+X+1)^{500}}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
7. $F(X)=\frac{2X-1}{X(X+1)^2(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 3

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$$

en recherchant une symétrie simplifiant les calculs.

Exercice 4

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$:

1. $F(X)=\frac{1}{X^n-1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$;
2. $F(X)=\dfrac{X^{p-1}}{X^{2n}-1}$ $(p,n\in\mathbb{N}^*,\ p\leq 2n)$;
3. $F(X)=\dfrac{X^{p}}{X^{2n+1}-1}$ $(p,n\in\mathbb{N}^*,\ p\leq 2n)$;
4. $F(X)=\dfrac{X^{p-1}}{X^{2n}+1}$ $(p,n\in\mathbb{N}^*,\ p\leq 2n)$;
5. $F(X)=\dfrac{X^{p}}{X^{2n+1}+1}$ $(p,n\in\mathbb{N}^*,\ p\leq 2n)$.

2 Applications

Exercice 5

A l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une expression simplifiée de u_n et en déduire la limite éventuelle de la suite (u_n) :

1. $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; 2. $u_n=\sum_{k=0}^n\frac{k}{k^4+k^2+1}$;
3. $u_n=\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^3-k}$; 4. $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{3k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Exercice 6 $\star$

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F(X)=\frac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 7

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines distinctes non nulles x_1, ..., x_n.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X)=\frac{1}{X\,P(X)}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k\,P'(x_k)}$.

Exercice 8

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé.
Démontrer que $P'^2-P\,P''$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
[Considérer la fraction rationnelle $F=\frac{P'}{P}$.]

Exercice 9

Soient a_1, ..., a_n, λ_1, ..., λ_n $2n$ paramètres complexes $(n\in\mathbb{N}^*)$.
Résoudre dans $\mathbb{C}^n$ le système suivant :

$$\begin{cases}\frac{x_1}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2}{a_2+\lambda_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n+\lambda_1}=1\\ \frac{x_1}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2}{a_2+\lambda_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n+\lambda_2}=1\\ \cdots \qquad\qquad \cdots\\ \frac{x_1}{a_1+\lambda_n}+\frac{x_2}{a_2+\lambda_n}+\cdots+\frac{x_n}{a_n+\lambda_n}=1\end{cases}$$

[Pour cela on considèrera la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{x_1}{a_1+X}+\frac{x_2}{a_2+X}+\ldots+\frac{x_n}{a_n+X}-1.$$

On exprimera alors le fait que $\tilde{F}(\lambda_1)=\ldots=\tilde{F}(\lambda_n)=0$, ce qui permet en réduisant au même dénominateur de factoriser le numérateur de F, d'où une autre expression de la décomposition en éléments simples de F donnant les valeurs de x_1, ..., x_n.]