PCSI - mathématiques

Formes linéaires et hyperplans

K est un corps commutatif. E est un K-ev.

1 Notion générale d'hyperplan

Soit V un sev de E. La relation $\mathcal{R}_V$ est définie sur E par

$$x \mathcal{R}_V y \Leftrightarrow y - x \in V.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}_V$ est une relation d'équivalence sur E, compatible[1] avec la structure de K-ev de E. Alors, l'ensemble E/V des classes d'équivalences modulo V (càd modulo $\mathcal{R}_V$) est canoniquement muni d'une structure d'ev définie par : $(x)_V + (y)_V = (x+y)_V$ et $\lambda (x)_V = (\lambda x)_V$. La *surjection canonique*

$$s_V : \left| \begin{array}{l} E \to E/V \\ x \mapsto (x)_V \end{array} \right.$$

est K-linéaire et : $\ker(s_V) = V$.

E/V est l'*espace vectoriel quotient* de E par le sev V.

Définition 1 *La* codimension *de V dans E est* $\operatorname{codim}_E(V) = \dim_K(E/V)$.

Si E est de dimension finie, on déduit facilement du th. fondamental de dimension appliqué à la surjection canonique s_V que : $\operatorname{codim}_E(V) = \dim_K(E) - \dim_K(V)$.

Définition 2 *Un* hyperplan *de E est un sev de E de codimension* 1.

Remarque 1 *Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, les hyperplans de E sont les sev de E de dimension $n-1$.*

On va maintenant donner plusieurs caractérisations de cette notion :

1.1 Première caractérisation

Le th. suivant signifie que *les* hyperplans de E sont *les* supplémentaires des droites vectorielles de E.

Théorème 1 *Soit H un sev de E.*

1. *Si H est un hyperplan de E, H est un sev strict de E, et si $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus Ka$.*
2. *S'il existe $a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus Ka$, H est un hyperplan de E.*

[1] Càd, pour tous x, y, $z \in E$ et $\lambda \in K$: $x \mathcal{R}_V y \Rightarrow (x+z \mathcal{R}_V y+z$ et $\lambda x \mathcal{R}_V \lambda y)$.

1.2 Deuxième caractérisation

Théorème 2 Les *hyperplans de E sont* les *éléments maximaux de l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sev stricts de E.*

Pour parler vite, les hyperplans de E sont les "sev stricts maximaux" de E.

Ce dernier résultat admet la conséquence suivante : tout sev strict est contenu dans un hyperplan.

Plus précisément :

Corollaire 1 *Si V est un sev* strict *de E, il existe au moins un hyperplan H de E tel que $V \subset H$.*

Les autres résultats font appel à la notion de forme linéaire.

2 Formes linéaires

Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans le corps K. L'ensemble des formes linéaires sur E est le *dual* de E noté E^*. $E^* = L_K(E, K)$ est canoniquement un K-ev.

On utilisera ce lemme très simple au sujet des formes linéaires *non nulles* :

Lemme 1 *Si $\varphi \in E^*$, il y a équivalence entre*

1. *$\varphi \neq 0$;*
2. *il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$.*

On voit alors apparaître le rapport entre les deux notions précédentes :

2.1 Formes linéaires et hyperplans

Le noyau de la forme linéaire nulle est évidemment E. Dans tous les autres cas, il s'agit d'un hyperplan :

Théorème 3 Les *hyperplans de E sont* les *noyaux des formes linéaires* non nulles *sur E.*

Avec les mêmes outils, on peut étudier les combinaisons linéaires existant entre formes linéaires.

2.2 Proportionnalité de deux formes linéaires

Proposition 1 *Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. Alors l'application φ est* surjective *de E sur K et si $\psi \in E^*$, il y a équivalence entre*

1. *$\ker \varphi \subset \ker \psi$;*
2. *Il existe $\lambda \in K$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.*

2.3 Étude d'une famille finie de formes linéaires

Le th. suivant généralise le lemme 1.

Théorème 4 *Soit* $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ *une famille d'éléments de* E^* *(*$p \in \mathbb{N}^*$*). Il y a équivalence entre les énoncés*

1. $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ *est libre ;*
2. $x \mapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_p(x))$ *est une surjection de* E *sur* K^p *;*
3. $\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)\right) = p$ *;*
4. *Il existe* a_1, ..., $a_p \in E$ *tels que* $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}$ *pour* i, $j = 1$, ..., p.

À partir de là, on peut estimer le rang d'une famille de formes linéaires.

Soient φ_1, ..., $\varphi_n \in E^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Posons $r = \operatorname{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$.

- si $r = 0$, $\varphi_1 = ... = \varphi_n = 0$ donc $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) = E$. Dans ce cas, $\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)\right) = \dim_K(E/E) = 0 = r$.
- supposons $r \neq 0$. Il existe i_1, ..., $i_r \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts tels que $(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_r})$ soit une base de $\operatorname{Vect}\langle(\varphi_1, ..., \varphi_n)\rangle$.
  Évidemment $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subset \bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{i_k})$.
  Réciproquement soit $j \in [\![1, n]\!]$, $j \notin \{i_1, ..., i_r\}$. Il existe λ^1, ..., $\lambda^r \in K$ tels que $\varphi_j = \lambda^1 \varphi_{i_1} + ... + \lambda^r \varphi_{i_r}$. Par suite, $\bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{i_k}) \subset \ker \varphi_j$. Donc $\bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{i_k}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$.
  En somme, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) = \bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{i_k})$. Comme $(\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_r})$ est libre, le th. 4 montre que $r = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{i_k})\right) = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)\right)$. On a donc montré :

Théorème 5 *Si* φ_1, ..., $\varphi_n \in E^*$,

$$\operatorname{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)\right).$$

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser la prop. 1 :

Théorème 6 *Soient* φ_1, ..., $\varphi_n \in E^*$. *Si* $\psi \in E^*$, *il y a équivalence entre*

1. ψ *est combinaison linéaire de* $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ *;*
2. $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subset \ker \psi$.