PCSI - exercices de mathématiques

Torseurs

Dans tous les exercices, $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des torseurs de $\mathcal{E}_3 = \mathbb{R}^3$ affine euclidien. $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 6 et si $\vec{V} \in \mathcal{V}$ on note Δ (*resp.* Ω, $\vec{I}$, $q\left(\vec{V}\right)$) l'axe central (*resp.* la résultante, l'invariant vectoriel, scalaire) de $\vec{V}$. On note $\gamma\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ le comoment de deux torseurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Exercice 1

Soit $\vec{V}$ un torseur non constant de résultante $\vec{\Omega}$. Démontrer que, pour tout point $O \in \mathcal{E}_3$, l'axe de $\vec{V}$ est $\Delta = H + \mathbb{R}\vec{\Omega}$, où $H = O + \frac{1}{\|\vec{\Omega}\|^2}\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(O)$.

Exercice 2

1. Démontrer que si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont deux torseurs de $\mathcal{E}_3$ on a : $q\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = q\left(\vec{V}_1\right) + q\left(\vec{V}_2\right) + \gamma\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$.
2. En déduire que la somme de deux torseurs élémentaires $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un torseur élémentaire *ssi* $\gamma\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0$.
3. Démontrer que si $\vec{G}_1$ et $\vec{G}_2$ sont deux glisseurs (non nuls), leurs axes Δ_1 et Δ_2 sont coplanaires *ssi* $\gamma\left(\vec{G}_1, \vec{G}_2\right) = 0$.
4. En déduire que $\vec{G}_1 + \vec{G}_2$ est un glisseur *ssi* Δ_1 et Δ_2 sont coplanaires et $\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 \neq \vec{0}$.

Exercice 3

Démontrer que si $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ est un sev de $\mathcal{V}$ ne contenant que des glisseurs, $\dim(\mathcal{G}) \leq 3$. Étudier chacun des cas possibles. [Pour cet exercice, on assimilera $\vec{0}$ à un glisseur, et on utilisera ex. 2.]

Exercice 4

Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux glisseurs d'axes Δ_1 et Δ_2. Démontrer l'équivalence entre

(1) Δ_1 et Δ_2 sont orthogonaux et sécants, et

(2) $\left(\vec{\Omega}_1 \,\middle|\, \vec{\Omega}_2\right) = 0$ et $\gamma\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0$.

Exercice 5

Déterminer la résultante $\vec{\Omega}$ et l'invariant vectoriel $\vec{I}$ d'un torseur $\vec{V}$ d'axe $\Delta \left\{\begin{smallmatrix} 2x-y & =0 \\ 4x-y+2z-1 & =0 \end{smallmatrix}\right.$ et de moments 5 par rapport à Ox et Oy.

Exercice 6

Soient $\vec{V}$ un torseur non constant et $A \in \mathcal{E}_3$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ tels que $\vec{V}(M) = \overrightarrow{AM}$.

Exercice 7

Si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2 \in \mathcal{V}$ on définit

$$\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right)(M) = \vec{V}_1(M) \wedge \vec{\Omega}_2 - \vec{V}_2(M) \wedge \vec{\Omega}_1.$$

1. Démontrer que $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) \mapsto \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est une application bilinéaire alternée de $\mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{V}$.
2. Démontrer que $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ admet un axe *ssi* $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ont deux axes non parallèles.
3. Démontrer que dans ce cas l'axe de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est orthogonal à Δ_1 et Δ_2.

Exercice 8

Soit $\vec{V}$ le torseur de composantes $(X, 0, 3X, L, 0, 3L)$ $(X \neq 0,\ L \neq 0)$.

1. Déterminer le lieu des points M de xOy tels que $\vec{V}(M) \perp \vec{k}$.
2. Démontrer que pour tous les points M précédents, la droite $M + \mathbb{R}\vec{V}(M)$ reste tangente à une parabole fixe.

Exercice 9

Soient $\vec{V}$ un torseur non constant d'axe Δ et $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}_3$ ni parallèle ni perpendiculaire à Δ. Démontrer que l'on peut décomposer $\vec{V} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ avec $\vec{G}_1$ (*resp.* $\vec{G}_2$) glisseur d'axe contenu dans $\mathcal{P}$ (*resp.* $\perp \mathcal{P}$).

Exercice 10

Soient $\vec{G}'$ et $\vec{G}''$ deux glisseurs d'axes Δ' et Δ'' non parallèles. Soient Δ la perpendiculaire commune à Δ' et Δ'' et $\vec{G}_\lambda$ un glisseur variable d'axe Δ. Démontrer que l'axe D_λ de $\vec{V}_\lambda = \vec{G}_\lambda + \vec{G}' + \vec{G}''$ reste parallèle à un plan fixe.

Exercice 11

A, B, C et D sont quatre points de $\mathcal{E}_3$.

1. Démontrer que $M \mapsto \vec{V}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ est un torseur.
2. On suppose $\left(\overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AC}\right) = 0$, $D = C + \lambda\overrightarrow{AB}$. Déterminer l'axe Δ_λ de $\vec{V}$.

Exercice 12

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont deux torseurs de résultantes $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$ non colinéaires. Démontrer que l'axe de $\vec{V} = \lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2$ rencontre orthogonalement la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2.

Exercice 13

A et B sont deux points de $\mathcal{E}_3$, $\vec{V} \in \mathcal{V}$. Peut-on décomposer $\vec{V} = \vec{G}_A + \vec{G}_B$ avec $\vec{G}_A$ (*resp.* $\vec{G}_B$) glisseur d'axe contenant A (*resp.* B) ?

Exercice 14

Soit $\vec{V} \in \mathcal{V}$. Déterminer le lieu des points M de $\mathcal{E}_3$ tels que la droite $M + \mathbb{R}\vec{V}(M)$ contienne un point $A \in \mathcal{E}_3$ donné.

Exercice 15

Soient $\vec{V} \in \mathcal{V}$ non constant et $\mathcal{P}$ un plan non parallèle à $\vec{\Omega}$. Déterminer les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{V}(M)$ soit normal à $\mathcal{P}$, et les droites $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ telles que le moment $\vec{V}_{\mathcal{D}}$ de $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{D}$ soit égal à un réel fixé k.