PC - exercices de mathématiques

Permutations

$\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique d'indice n. $\mathfrak{A}_n$ est le groupe alterné d'indice n.

Une permutation σ est notée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Si $k, l \in [\![1, n]\!]$, $k \neq l$, la transposition $\tau_{k,l}$ (qui échange k et l) est notée (k/l).

Un p-cycle σ défini par $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour $i = 1, ..., p-1$ et $\sigma(a_p) = a_1$ est noté $(a_1\, a_2 ... a_{p-1}\, a_p)$.

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *normal* s'il est invariant par tous les automorphismes intérieurs σ_a : $\sigma_a \langle H \rangle = aHa^{-1} \subset H$ pour tout $a \in G$. Il revient au même de dire que H est le noyau d'un morphisme f du groupe G dans un groupe G'.

Exercice 1

Décomposer en cycles et en transpositions ; déterminer la signature et l'ordre dans le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ de la permutation σ.

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&5&4&1&2 \end{pmatrix}$ $(n = 5)$;
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&6&3&1 \end{pmatrix}$ $(n = 6)$;
3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 3&1&4&6&2&5 \end{pmatrix}$ $(n = 6)$;
4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 1&4&5&6&2&3 \end{pmatrix}$ $(n = 6)$;
5. $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 3&7&8&9&4&5&1&2&6 \end{pmatrix}$ $(n = 9)$.

Exercice 2

Déterminer une décomposition en transpositions et la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $(\in \mathfrak{S}_n)$.

Exercice 3 *générateurs de $\mathfrak{S}_n$*

Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les ensembles de permutations suivants :

1. $\{(1/2), (2/3), ..., (n-1/n)\}$;
2. $\{(1/2), (1/3), ..., (1/n)\}$;
3. $\{(1/2), (1\,2\,3\, ...\, n)\}$.

[On rappelle que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.]

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On appelle $\mathfrak{A}'_n$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par l'ensemble des 3-cycles $(1\,2\,3)$, $(1\,2\,4)$, $(1\,2\,n)$.

1. Démontrer que $\mathfrak{A}'_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$.
2. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$. Démontrer que les produits de transpositions $(1/2)(i/j)$ et $(i/j)(1/2)$ appartiennent à $\mathfrak{A}'_n$.
3. En déduire que $\mathfrak{A}'_n = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit φ un morphisme de groupes surjectif de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$, càd : il existe au moins une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\varphi(\sigma) = -1$.

1. Démontrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varphi(\sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)$.
2. On pose $H_+ = \{\sigma \in S_n \mid \varphi(\sigma) = 1\}$ et $H_- = \{\sigma \in \Sigma_n \mid \varphi(\sigma) = -1\}$. Démontrer que H_+ et H_- ont même cardinal.
3. Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts.
Vérifier que $(i/j) = (i/k)(j/l)(k/l)(j/l)(i/k)$ et $(i/j) = (j/l)(i/l)(j/l)$.
4. En déduire que toutes les transpositions ont la même image par φ, que celle-ci est -1 et enfin que $\varphi = \varepsilon$ (signature).

Exercice 6

Démontrer qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 15 dans $\mathfrak{S}_5$. Ainsi, la réciproque du théorème de LAGRANGE[1] concernant le cardinal des sous-groupes est fausse.

Quel est le plus petit entier n tel qu'il existe un élément d'ordre 15 dans $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 7 $\mathfrak{A}_5$ *est simple*

On rappelle que $\mathfrak{A}_5$ désigne le groupe alterné d'indice n : $\mathfrak{A}_5 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$.

1. Pourquoi $\mathfrak{A}_5$ est-il un sous-groupe *normal* de $\mathfrak{S}_5$?
2. Soit τ une transposition dans $\mathfrak{S}_5$. En utilisant l'application γ_τ : $\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{A}_5 & \to \mathfrak{S}_5 \\ \sigma & \mapsto \tau \circ \sigma \end{array} \right.$, démontrer que: $\text{card}\,(\mathfrak{A}_5) = 60$.
3. Pour tout $p \in [\![1, 6]\!]$, déterminer le nombre (éventuellement nul) d'éléments d'ordre p dans le groupe $(\mathfrak{A}_5, \circ)$. Vérifier à l'aide de 2. qu'on obtient bien ainsi tous les éléments de $\mathfrak{A}_5$. Pouvait-on être certain *a priori* de ce résultat (*cf.* ex.6) ?
4. a, b, c, d, e désignant les 5 entiers 1, 2, 3, 4, 5 dans un ordre quelconque, décomposer les permutations $(a/b)(c/d)$ et $(abcde)$ en produits de cycles d'ordre 3. En déduire que le groupe $(\mathfrak{A}_5, \circ)$ est engendré par l'ensemble des cycles d'ordre 3. (*cf* . aussi ex. 4 pour une autre démonstration de ce résultat.)
5. (a) Si $\sigma = (a/b)(c/d)$, soit $\rho = (abe)$; montrer que $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma$ est un cycle d'ordre 3.

[1]Pour tout sous-groupe H du groupe fini G, card H divise card G.

(b) Si $\sigma = (abcde)$, soit $\rho = (aec)$; montrer que $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma$ est un cycle d'ordre 3.

6. Soient a, b, c (*resp.* a', b', c') trois éléments distincts de $[\![1,5]\!]$.
Démontrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_5$ telle que $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$, $\sigma(c) = c'$.
Vérifier qu'alors $\sigma \circ (abc) \circ \sigma^{-1} = (a'b'c')$.

7. Déduire des résultats précédents que si H est un sous-groupe *normal* de $\mathfrak{A}_5$, $H = \{\mathrm{Id}_5\}$ ou $H = \mathfrak{A}_5$ ([2])
Que dire de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$?

8. Vérifier que dans $\mathfrak{A}_4$ l'ensemble $\{\mathrm{Id}_4, (1/2)(3/4), (1/3)(2/4), (1/4)(2/3)\}$ est un sous-groupe et qu'il est normal.
Ainsi, le résultat démontré précédemment n'est pas valable pour $n < 5$.

[2]On dit que le groupe $\mathfrak{A}_5$ est *simple*. Ce fait "explique" que les équations polynômiales de degré ≥ 5 ne soient pas, en général, résolubles par radicaux.