PCSI - mathématiques

Dualité

K désigne un corps commutatif ; E est un K-ev.

1 Généralités

Définition 1

- *le* dual *de E est $E^* = L_K(E, K)$.*
- *les éléments de E^* (càd les applications K-linéaires de E dans K) sont les* formes (K-)linéaires *sur E.*

E^* est donc le K-ev des formes linéaires sur le K-ev K.

Notation 1 *Si $\varphi \in E^*$ et si $x \in E$ on pose $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$.*

L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} E^* \times E & \to & K \\ (\varphi, x) & \mapsto & \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x) \end{array} \right.$$

est bilinéaire, ce qui signifie que $\langle \lambda\varphi + \mu\psi, x \rangle = \lambda \langle \varphi, x \rangle + \mu \langle \psi, x \rangle$ et $\langle \varphi, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle \varphi, x \rangle + \mu \langle \varphi, y \rangle$ quels que soient λ, $\mu \in K$, x, $y \in E$ et φ, $\psi \in E^*$.

Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in I}$ une base de E. Si $j \in I$, soit

$$u^{*j} : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x = \sum_{i \in I} x^i u_i & \mapsto & u^{*j}(x) = x_j \end{array} \right. .$$

$u^{*j} \in E^*$.

Si $x \in E$, $x = \sum_{i \in I} \langle u^{*i}, x \rangle u_i$.

Si i, $j \in I$, $u_j = \sum_{i \in I} \delta^i_j u_i$ donc $u^{*i}(u_j) = \delta^i_j$ soit :

$$\langle u^{*i}, u_j \rangle = \delta^i_j.$$

On en déduit :

Théorème 1 *$\mathcal{U}^* = (u^{*i})_{i \in I}$ est libre dans le K-ev E^*.*

1.1 L'application linéaire canonique de E dans E^{**}

$E^{**} = (E^*)^* = L_K(E^*, K)$ est le *bidual* de E.

Soit $a \in E$. On définit

$$a^{**} : \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & K \\ \varphi & \mapsto & a^{**}(\varphi) = \varphi(a) \end{array} \right. :$$

$a^{**}(\varphi) = \varphi(a) = \langle \varphi, a \rangle$.

Si φ, $\psi \in E^*$ et si λ, $\mu \in K$ on a évidemment $a^{**}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \langle \lambda\varphi + \mu\psi, a \rangle = \lambda \langle \varphi, a \rangle + \mu \langle \psi, a \rangle = \lambda a^{**}(\varphi) + \mu a^{**}(\psi)$.

Par suite : $a^{**} \in E^{**}$.

Théorème 2 *L'application $\gamma_E : E \to E^{**}$; $x \mapsto x^{**}$ est une application K-linéaire et injective.*

γ_E est l'*application linéaire canonique* de E dans E^{**}.

On a deux applications : $\left| \begin{array}{ccc} E^* \times E & \to & K \\ (\varphi, x) & \mapsto & \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x) \end{array} \right.$

et $\left| \begin{array}{ccc} E^{**} \times E^* & \to & K \\ (u, \varphi) & \mapsto & \langle u, \varphi \rangle = u(\varphi) \end{array} \right.$ qui sont K-bilinéaires.

De plus, si $x \in E$ et $\varphi \in E^*$: on a $\langle \varphi, x \rangle = \langle x^{**}, \varphi \rangle$.

1.2 Orthogonal d'une partie de E

Soit $a \in E$; on a

$$a^{**} : E^* \to K \ ; \ \varphi \mapsto a^{**}(\varphi) = \varphi(a) = \langle \varphi, a \rangle .$$

Définition 2 *On pose $a^\perp = \ker(a^{**})$:* orthogonal *de a.*

$a^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(a) = 0\}$ est donc l'ensemble des formes linéaires sur E qui s'annulent en a.

Soit $P \subset E$. On pose

Définition 3 *$P^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in P, \varphi(x) = 0\}$:* orthogonal *de la partie P.*

On a donc $P^\perp = \bigcap_{x \in P} x^\perp$: c'est donc un sev de E^*.

Cette définition est reliée à la précédente par :

Proposition 1 *Si $a \in E$, $a^\perp = \{a\}^\perp = (K.a)^\perp$.*

Plus généralement :

Proposition 2 *Si $P \subset E$, $P^\perp = (\mathrm{Vect}\langle P \rangle)^\perp$.*

On en déduit que si $V = \mathrm{Vect}\left\langle (u_i)_{i \in I} \right\rangle$, $V^\perp = \bigcap_{i \in I} u_i^\perp$.

Les remarques suivantes récapitulent le fonctionnement de l'orthogonal :

Remarque 1

1. *Si $P \subset Q \subset E$, $Q^\perp \subset P^\perp$;*
2. *$\{0_E\}^\perp = E^*$;*
3. *$E^\perp = \{0\}$;*
4. *Si V et W sont des sev de E, $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.*

1.3 Transposition d'une application linéaire

Soient E, F des K-ev et soit $f \in L_K(E, F)$.

Définition 4 *La* transposée *de f est*

$${}^t f : \left| \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \psi & \mapsto & {}^t f(\psi) = \psi \circ f \end{array} \right.$$

On vérifie facilement :

Proposition 3 *${}^t f$ est linéaire de F^* dans E^*.*

En outre, l'application $f \mapsto {}^t f$ est K-linéaire de $L_k(E,F)$ dans $L_K(F^*,E^*)$. Le résultat suivant résume les propriétés fonctionnelles de la transposition :

Théorème 3 *Si E, F, G sont des K-ev, $f \in L_K(E,F)$ et $g \in L_K(F,G)$ on a*

1. *${}^t \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$;*
2. *${}^t (g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$;*
3. *Si f est un isomorphisme de E sur F, ${}^t f$ est un isomorphisme de F^* sur E^*.*

De plus, le noyau de ${}^t f$ est relié à l'image de f :

Théorème 4 *Si $f \in L_K(E,F)$, $\ker({}^t f) = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.*

2 Dualité en dimension finie

E est ici un K-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Base duale d'une base de E

Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Si $i \in [\![1,n]\!]$ on a défini

$$u^{*i} : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x = x^1u_1 + ... + x^n u_n & \mapsto & x^i \end{array} \right. .$$

Théorème 5 *La famille $\mathcal{U}^* = \left(u^{*i}\right)_{1\le i\le n}$ est une base de E^* et si $\varphi \in E^*$, la décomposition de φ dans la base $\mathcal{U}^*$ s'écrit $\varphi = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, u_i\rangle u^{*i}$.*

Définition 5 *La famille $\mathcal{U}^* = \left(u^{*i}\right)_{1\le i\le n}$ est la* base duale *de la base $\mathcal{U}$.*

Corollaire 1 *$\dim_K(E^*) = \dim_K(E)$ pour un K-ev E de dimension* finie.

La base duale est caractérisée par les relations suivantes :

Proposition 4 *Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. Si $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$ est une famille d'éléments de E^* et si $\theta^i(u_j) = \delta^i_j$ quels que soient i, $j \in [\![1,n]\!]$, $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$ est la base duale de $\mathcal{U}$.*

Remarque 2 *Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1\le i\le n}$ une base de E.*

1. *Les formes linéaires due E sont les applications*
$$\left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x = x^1u_1 + ... + x^n u_n & \mapsto & \alpha_1 x^1 + ... + \alpha_n x^n \end{array} \right. .$$
2. *Si α_1, ..., $\alpha_n \in K$ et si l'on considère*
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x = \sum_{i=1}^n x^i u_i & \mapsto & \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \end{array} \right. ,$$
$\varphi \in E^*$ et $\varphi = \alpha_1 u^{*1} + ... + \alpha_n u^{*n}$.

2.2 L'isomorphisme canonique $E \to E^{**}$

Si $a \in E$, on a défini $a^{**} : \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & K \\ \varphi & \mapsto & a^{**}(\varphi) = \varphi(a) \end{array} \right.$.
L'application linéaire canonique de E dans E^{**} est

$$\gamma_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \gamma_E(x) = x^{**} \end{array} \right. .$$

Théorème 6 *γ_E est un isomorphisme de K-ev et si $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ est une base de E, $(u_1^{**}, ..., u_n^{**})$ est une base de E^* et c'est la base duale de $\mathcal{U}^* = \left(u^{*1}, ..., u^{*n}\right)$.*

Cela peut se schématiser ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} E & & E^* & & E^{**} \\ u_1 & \longrightarrow & u^{*1} & \longrightarrow & u_1^{**} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_n & \longrightarrow & u^{*n} & \longrightarrow & u_n^{**} \\ \text{base } \mathcal{U} & & \begin{array}{c}\text{base duale} \\ \mathcal{U}^* \text{ de } \mathcal{U}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{base duale} \\ \text{de } \mathcal{U}^*\end{array} \end{array}$$

On en déduit notamment que toute base de E^* est la base duale d'une base de E :

Théorème 7 *Si $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$ est une base de E^*,* il existe *une base $\mathcal{U} = (u_i)_{1\le i\le n}$ de E et* une seule *telle que $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$ soit la base duale de $\mathcal{U}$.*

$\mathcal{U}$ est parfois appelée la base "antiduale" de $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$.

Détermination "pratique" de $\mathcal{U}$

On fixe une base $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_n)$ dans E. On suppose que pour $j = 1$, ..., n on sait décomposer la forme linéaire v^{*j} dans la base $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$ de E^* : $v^{*j} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \theta^i$.

$(v_i^{**})_{1\le i\le n}$ est la base duale de $\mathcal{V}^* = \left(v^{*i}\right)_{1\le i\le n}$, donc si $w \in E^{**} = (E^*)^*$, la décomposition de w dans $(v_i^{**})_{1\le i\le n}$ s'écrit $w = \sum_{i=1}^n \left\langle w, v^{*i}\right\rangle v_i^{**}$ [1].

On applique cette formule à θ_{*j}, $(\theta_{*1}, ..., \theta_{*n})$ étant la base duale de $\left(\theta^i\right)_{1\le i\le n}$: $\theta_{*j} = \sum_{i=1}^n \left\langle \theta_{*j}, v^{*i}\right\rangle v_i^{**}$ [2].

Or $v^{*i} = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \theta^i$ donc : $\theta_{*j}\left(v^{*i}\right) = \alpha_j^i$ et : $\theta_{*j} = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i v^{**i}$, ce qui s'écrit encore : $\gamma_E(u_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_j^i v_i\right)^{**} = \gamma_E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_j^i v_i\right)$.

Comme γ_E est un isomorphisme, on en déduit :

$$u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i v_i.$$

2.3 Dimension de l'orthogonal

Grâce au th. de la base incomplète, on peut en outre, *en dimension finie*, préciser la dimension de l'orthogonal d'un sev :

Théorème 8 *Soit E un K-ev de dimension* finie *$n \in \mathbb{N}^*$. Si F est un sev de E,*

$$\dim_K\left(F^{\perp}\right) = \dim_K(E) - \dim_K(F).$$

[1] de même que, dans E, $\varphi = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, u_i\rangle u^{*i}$.

[2] Si $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta^i$ et $\lambda_j = \theta_{*j}(\varphi)$.