Intégrales de Wallis - formule de Stirling

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'*intégrale de Wallis* d'indice n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

Partie I *Résultats classiques*

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < W_{n+1} \leq W_n$.
   (b) En déduire que la suite (W_n) est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

2. (a) Démontrer que si $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $W_n \leq a \sin^n a + (\frac{\pi}{2} - a)$. [Fractionner l'intervalle d'intégration.]
   (b) En déduire que $\ell = \lim W_n = 0$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. [Effectuer une intégration par parties.]

4. En déduire
   (a) $\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$;
   (b) pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad (\textit{première formule de Wallis})$$

Partie II *Equivalent de W_n et deuxième formule de Wallis*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = n \, W_n \, W_{n-1}$.

1. Calculer S_{n+1} en fonction de S_n ; en déduire :
   (a) la limite de (S_n) ;
   (b) celle de $(n \, W_n^2)$.

2. Démontrer que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Utiliser le I.4. pour montrer que : $\pi = \lim \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p.((2p)!)^2}$ (*deuxième formule de Wallis ; 1665*).

Partie III *Formule de Stirling*

Il s'agit de prouver que :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

1. On démontre que $n!$ a un équivalent de la forme $\lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$; $v_n = \ln u_n$; $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Démontrer que l'on peut écrire : $w_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n})$.
   (b) En déduire que $w_n \sim -\frac{1}{12n^2}$. En déduire que la série $\sum w_n$ converge[1].
   (c) En déduire que (v_n) est convergente, puis que (u_n) *est convergente vers une limite* $\lambda > 0$.

2. Calcul de λ : utiliser la deuxième formule de Wallis et le résultat du III.1.(c) pour déterminer λ.

[1] Càd, que la suite $(\sum_{k=1}^{n} w_k)$ converge.