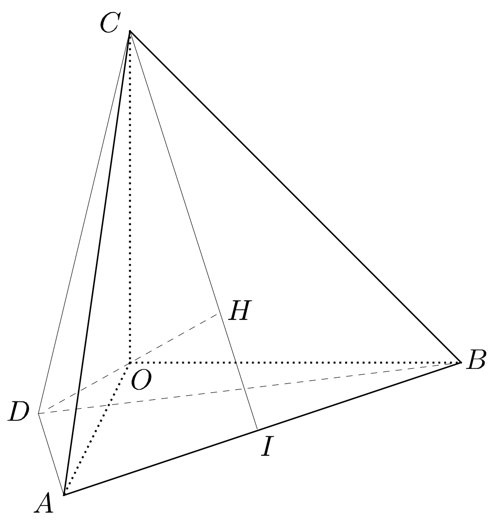
Étude d'un tétraèdre

Soient a un réel strictement positif et (O, A, B, C) un tétraèdre tel que :

- (O, A, B), (O, A, C) et (O, B, C) sont des triangles rectangles en O ;
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle (A, B, C), H le pied de la hauteur issue de O du triangle (O, I, C), et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



Partie I *Calcul de volume*

1. Quelle est la nature du triangle (A, B, C) ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle (A, B, C).
3. Calcul de OH.
   (a) Calculer le volume V du tétraèdre (O, A, B, C) puis l'aire S du triangle (A, B, C).
   (b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Partie II *Étude du tétraèdre* (A, B, C, D)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\ ;\ \left(\frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)\right)$.

1. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.
2. Démontrer que le tétraèdre (A, B, C, D) est régulier (c'est à dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
3. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre (A, B, C, D).
   Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

——————— FIN ———————

[Baccalauréat S 2003 ex. 2]