Symétries, affinités

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ev. F et G sont deux sev *supplémentaires* de E : $E = F \oplus G$.
On note p (*resp.* q) la projection sur F (*resp.* G) parallèlement à G (*resp.* F).

Partie I *Symétries*

Pour tout $x \in E$; $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ on pose $s(x) = y - z$.
On définit ainsi $s : E \to E$: *symétrie par rapport à F parallèlement à G.*

1. Rappeler pourquoi s est un *automorphisme* du $\mathbb{K}$ev E. Que vaut s^{-1} ?
2. Exprimer :
   (a) s et Id_E en fonction de p et q ;
   (b) p et q en fonction de s et Id_E.
3. En déduire $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.
4. Que vaut s lorsque $F = E$? Lorsque $F = \{0_E\}$?

Partie II *Caractérisation des symétries*

Soit f un endomorphisme *involutif* de E : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Démontrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) = (f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{L(E)}$ et en déduire des inclusions entre les images et noyaux de $f - \mathrm{Id}_E$ et $f + \mathrm{Id}_E$.
2. Démontrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ sont deux sev *supplémentaires* de E.
3. Démontrer que f est la symétrie par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Partie III *Affinités*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in E$; $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ on pose $a_\alpha(x) = y + \alpha\, z$.
a_α s'appelle l'*affinité* d'axe F, de direction G et de rapport α.

1. Que valent a_0 ? a_1 ? a_{-1} ?
2. Justifier que a_α est un endomorphisme de E.
   On suppose dans toute la suite que $\alpha \notin \{0, 1\}$.
3. Calculer $a_\alpha \circ a_\beta$. En déduire que a_α est un automorphisme de E et préciser a_α^{-1}.
4. Déterminer $\ker(a_\alpha - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$. Calculer $(a_\alpha - \mathrm{Id}_E) \circ (a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$ et $(a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id}_E) \circ (a_\alpha - \mathrm{Id}_E)$.
5. Plus généralement, résoudre la condition $a_\alpha(x) = \lambda\, x$ par rapport à $x \in E$, selon $\lambda \in \mathbb{K}$.

Partie IV *Caractérisation des affinités*

Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ et soit $f \in L(E)$ vérifiant : $f^2 - (\alpha + 1)\, f + \alpha\,\mathrm{Id}_E = 0_{L(E)}$.

1. Comment la condition précédente se factorise-t-elle (par rapport à $\circ$) ?
2. Quelles relations d'inclusion existe-t-il entre les noyaux et les images de $f - \mathrm{Id}_E$ et $f - \alpha\,\mathrm{Id}_E$?
3. Démontrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$ sont deux sev *supplémentaires* de E.
4. Démontrer que f est l'affinité d'axe $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de direction $\ker(f - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$ et de rapport α.
5. Que dire des cas $\alpha = 0$? $\alpha = 1$?