Suites récurrentes
Initiation à la théorie du chaos

1 Suites récurrentes

1.1 Généralités sur les suites récurrentes

Il s'agit d'étudier une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie des hypothèses "convenables".

1. *Bonne définition* de la suite (u_n) : $u_n \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow u_{n+1} \in \mathcal{D}(f)$. Cela peut dépendre du choix de u_0.

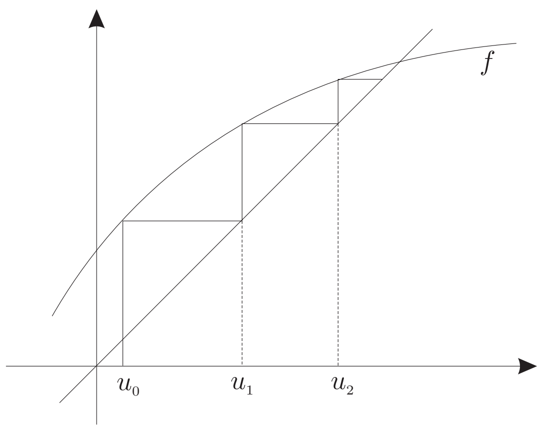
2. Supposons f continue — c'est en général le cas — alors si (u_n) CV vers $\ell \in \mathbb{R}$:

Proposition 1 $\boxed{\ell = f(\ell)}$ (ℓ est *point fixe* de f).

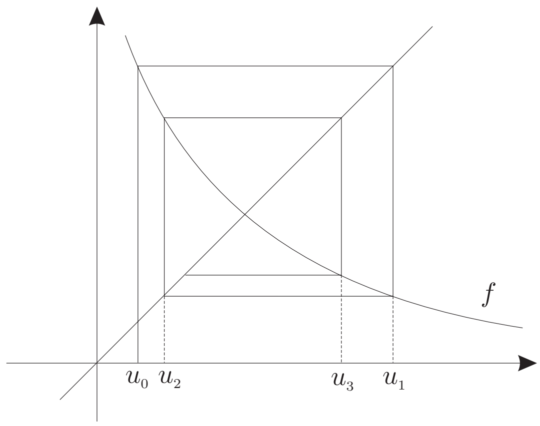
Que se passe-t-il alors

- si $u_0 = \ell$? si $u_{n_0} = \ell$?
- si f est continue mais sans point fixe ?

3. *Schémas :*



cas d'une fonction croissante



cas d'une fonction décroissante

1.2 Cas d'une fonction croissante

Démontrer alors la

Proposition 2 *Si* $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* f *croissante alors* (u_n) *est* monotone *:*

- *Si* $u_0 \leq u_1$, (u_n) *est croissante,*
- *Si* $u_0 \geq u_1$, (u_n) *est décroissante.*

Exemple 1 Etudier les suites ci-dessous (après avoir justifié leur classement dans la catégorie "f croissante"...) :

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ (ne peut-on donner une expression directe de (u_n) ici ?)

2. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

3. $u_0 =$?, $u_{n+1} = \frac{1}{4} + u_n^2$
(discuter selon la valeur de u_0).

1.3 Cas d'une fonction décroissante

On écrit alors $u_{p+2} = f(u_{p+1}) = f \circ f(u_p)$ que l'on sépare en :

$$\begin{cases} u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \\ u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}) \end{cases}$$

et $f \circ f$ *est croissante* donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et on sait que (u_n) CV *ssi* (u_{2n}), (u_{2n+1}) CV et ont même limite.

Exemple 2 Etudier les suites ci-dessous (après avoir justifié leur classement dans la catégorie "f décroissante"...) :

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2. $u_0 \in [0,\ 1]$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$
(discuter selon la valeur de u_0).

3. $u_0 =\ ?$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ (idem).

4. *Un exemple plus élaboré* : $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.
On suggère les étapes suivantes :

(a) Démontrer que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.

(b) Démontrer que l'une au moins des deux suites précédente est convergente.

(c) En déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Que peut-on dire de leurs limites ?

(d) On recherche dans cette question les points fixes de $g = f \circ f$. Mettre $g(x) - x$ sous la forme d'un quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de deux fonctions polynomiales. Quelle est la racine "évidente" α de P ? Factoriser $P(x)$ par $(x - \alpha)$.

(e) Pour un u_0 de votre choix dans $]0,\ 1[$, calculer grâce à votre machine des valeurs numériques approchées de u_{20} et u_{21}. Elles sont *a priori* proches des limites β et γ de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Que semblent valoir la somme s et le produit p de ces valeurs ? En déduire un polynôme de degré 2, à coefficients entiers, dont β et γ sont alors racines. Confirmer ces calculs en achevant la factorisation de P.

(f) En déduire :

i. les valeurs exactes de β et γ ;

ii. le signe de $g(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$;

iii. les variations et les limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) selon la position de u_0 par rapport à α, β et γ.

(g) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

2 Théorie du chaos

On s'intéresse à une suite (x_n) définie par la donnée de $x_0 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence

$$\boxed{x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)}$$

où le paramètre $\lambda \in\ ]0, 4]$. Il sera pratique de poser $f(x) = \lambda x(1 - x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- Vérifier que ce choix de λ entraîne bien $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Rédiger pour votre machine un programme permettant le calcul de x_n.

Conseils et remarques

- Rendre le paramètre λ facilement accessible et modifiable, par exemple en le stockant dans une mémoire spécifique.

- Programmer non seulement le passage d'un terme au suivant, mais aussi le calcul en une seule passe d'un nombre d'itérations spécifié à l'avance.

- En cas de doute sur le comportement de la suite (x_n), effectuer d'abord une centaine d'itérations, voire quelques centaines, pour laisser la suite ou ses sous-suites se rapprocher de sa (leurs) limite(s).

- Dans les parties 2.3. et 2.4., la précision nécessaire aux calculs finit par dépasser celle de la calculatrice. Deux machines distinctes, même apparemment similaires, pourront donner des résultats complètement différents.

2.1 Cas $0 < \lambda \leq 1 = \lambda_0$.

1. *Essais numériques*

   (a) Tester différentes valeurs de x_0 et λ. Quel comportement la suite semble-t-elle avoir ?

   (b) Que peut-on dire de la convergence pour $\lambda = 1$ par rapport à celle pour $\lambda < 1$? (Comparer par exemple les valeurs obtenues pour x_{100}.)

2. *Explications*

   (a) Démontrer que $(x_n) \searrow 0$.

   (b) Démontrer que $f(x) \leq \lambda x$ sur $[0,1]$; en déduire que $0 \leq x_n \leq \lambda^n x_0$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ (quand est-elle définie ?) ; interpréter ce résultat selon la remarque du 2.1.1.(b). À quelle suite "classique" pourrait-on comparer la suite (x_n) lorsque $\lambda < 1$?

   (c) Calculer $f'(0)$; qu'obtient-on lorsque $\lambda = 1$?

2.2 Cas $1 < \lambda \leq 3 = \lambda_1$.

1. *Essais numériques*

   (a) Essayer différents λ ; x_0 ; que peut-on conjecturer ? Que se passe-t-il pour $x_0 = 0$? Pour x_0 "voisin" de 0 ?

   (b) Que peut-on penser des variations de la suite (x_n) ? (On distinguera les cas "$\lambda \leq 2$" et "$\lambda > 2$", et on justifiera qu'on peut supposer $x_0 \leq \frac{1}{2}$.)

   (c) Que peut-on dire de la CV pour $\lambda = 2$ par rapport aux cas $\lambda \in \ ]1,3[\setminus \{2\}$? (Regarder x_{10}, x_{20}, x_{30}...)

   (d) Que dire du cas $\lambda = 3$? (Regarder attentivement (x_{2n}) et (x_{2n+1}).)

2. *Explications*

   (a) Déterminer la valeur exacte, en fonction de λ, de la limite $\ell(\lambda)$ de (x_n). Que vaut-elle pour $\lambda = 1$? Pour $\lambda = 3$?

   Pour $\lambda = 2$, expliquer pourquoi la suite (x_n) ne peut pas être monotone.

   (b) Posant $y_n = \ell(\lambda) - x_n$, calculer y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire la limite de la suite $(\frac{y_{n+1}}{y_n})$ et (lorsque $\lambda = 2$) de $(\frac{y_{n+1}}{y_n^2})$. Interpréter en fonction de la remarque du 2.2.1.(c) : à quelle suite "classique" pourrait-on comparer (y_n) ?

   (c) Calculer $f'(\ell(\lambda))$. Quelle est sa valeur pour $\lambda = 1$?

   A partir de quelle valeur a-t-on $|f'(\ell(\lambda))| \geq 1$?

2.3 Cas $3 < \lambda < \lambda_2 \simeq 3,5$.

1. *Essais numériques*

   (a) Tester divers λ, x_0. Que peut-on prévoir ?

   Que se passe-t-il pour $x_0 = 0$, pour $x_0 = \ell(\lambda)$, pour x_0 "voisin" de l'une de ces deux valeurs ? (Calculer x_{100})

   (b) Que dire de la CV lorsque λ se rapproche de la valeur $\lambda_2 \simeq 3,5$ (par valeurs inférieures) ?

2. *Explications* : calcul des points fixes de la fonction $f \circ f$.

   (a) Ecrire $f \circ f(x) - x = f \circ f(x) - f(x) + f(x) - x = (f(x) - x)g(x)$ où g est une fonction polynômiale de degré 2 que l'on déterminera. Résoudre "$g(x) = 0$" : on constatera que cette équation a deux solutions ℓ' et ℓ'' définies pour $\lambda \geq 3$. Que valent-elles pour $\lambda = 3$? Quelle remarque peut-on faire dans ce dernier cas ?

   (b) Prouver sans calcul que $f(\ell') = \ell''$ et $f(\ell'') = \ell'$.

   Montrer que $D \stackrel{\text{déf.}}{=} (f \circ f)'(\ell') = (f \circ f)'(\ell'')$; calculer D en fonction de $s = \ell' + \ell''$ et $p = \ell'\ell''$; en déduire D. Que vaut D lorsque $\lambda = \lambda_1$?

   (c) Déterminer la valeur exacte λ_2 (autre que λ_1) à partir de laquelle $|D| \geq 1$.

   A posteriori, étudier numériquement le cas $\lambda = \lambda_2$ (regarder attentivement les 4 sous-suites (x_{4n+k}) pour $k = 0, 1, 2, 3$).

2.4 Cas $\lambda_2 < \lambda < \lambda_\infty \sim 3,5696...$

(*Essais numériques seulement*)

1. Tester divers λ, x_0 ; qu'observe-t-on ? Augmenter graduellement la valeur de λ, p.ex. $\lambda = 3,5$; $3,56$; $3,565...$ Essayer de cerner la valeur λ_3 à partir de laquelle le comportement de la suite change à nouveau pour la première fois; ainsi que la valeur λ_∞ à partir de laquelle le comportement de la suite "change complètement".

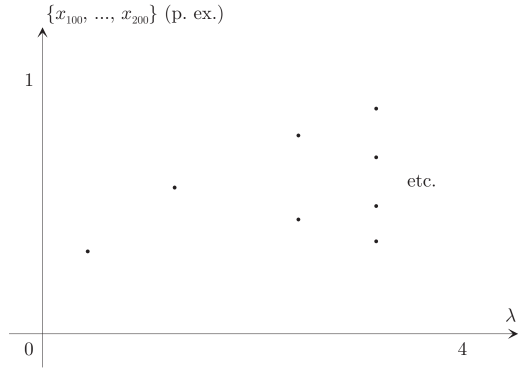
2. Que se passe-t-il pour $x_0 = \ell(\lambda)$, ℓ', ℓ''; pour x_0 "voisin" de l'une de ces valeurs ? (Effectuer une centaine d'itérations.)

3. Manip. suggérée : dresser un tableau donnant en fonction du nombre apparent de sous-suites convergentes de (x_n) les valeurs correspondantes du paramètre λ. À partir de là essayer de cerner (p.ex. par dichotomie) les valeurs "catastrophiques" λ_3, λ_4, λ_5,... pour lesquelles le comportement de la suite change :

nombre de sous-suites CV...	obtenues pour les valeurs de λ :
1	1 à 3
2	3 à λ_2
4	
8	
16	
32	
64	
$\vdots$	
chaos	
5	
10	
$\vdots$	
chaos	
3	
6	
12	
$\vdots$	
chaos	

4. Si vous avez calculé de nombreuses valeurs, former les termes successifs de la suite $\left(\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)$. Que remarque-t-on ?

5. *Si vous disposez d'une machine graphique*, une autre approche possible de l'étude de (x_n) est la suivante : programmez le tracé des valeurs de $\lambda \in [0,4]$ en abscisse et en ordonnée l'ensemble des valeurs $\{x_{100},...,x_{200}\}$ (supposées proches des limites des sous-suites CV de (x_n)).



2.5 Universalité des phénomènes observés

On se propose de reprendre l'étude effectuée sur la fonction f en remplaçant celle-ci par d'autres fonctions "à bosse".

Pour chacune des fonctions suivantes (sur $[0,1]$), observer les comportements de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'apparition des *bifurcations* lorsque le paramètre traverse les valeurs *catastrophiques* :

1. $f(x) = 1 - \lambda x^2$;
2. $f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

3 Appendice : théorème de Sharkovski

L'ordre dans lequel surviennent les "périodes" (nombre de sous-suites CV) a été étudié très précisément. Cela conduit au *théorème de Sharkovski.* On munit $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft ...$
$\triangleleft\ 6 \triangleleft 10 \triangleleft 14 \triangleleft 18 \triangleleft 22 \triangleleft ...$
$\triangleleft\ 12 \triangleleft 20 \triangleleft 28 \triangleleft 36 \triangleleft 44 \triangleleft ...$
$\triangleleft\ 3.2^n \triangleleft 5.2^n \triangleleft 7.2^n \triangleleft 9.2^n \triangleleft 11.2^n \triangleleft ...$
$\triangleleft\ 2^m \triangleleft 2^{m-1} \triangleleft ...$
$\triangleleft\ 32 \triangleleft 16 \triangleleft 8 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Alors le théorème énonce que si la période p est observée, c'est aussi le cas de tout q tel que $p \triangleleft q$. Par exemple, si on a la période 3 pour un certain λ, *tout* entier sera aussi période.