Récurrences linéaires

$a,\, b \in \mathbb{R}$.
On considère l'ensemble E des suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n.$$

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-ev (sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

2. Démontrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}^2$; $(u_n) \mapsto (u_0,\, u_1)$ est un *isomorphisme de* $\mathbb{R}$*-ev* de E sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $r \in \mathbb{R}$ et posons $u_n = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrer que $(u_n) \in E$ *ssi* r est solution d'une équation $(\mathcal{E})$ de degré 2 que l'on déterminera.

4. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$. On définit $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ par $x_n = r_1^n$ et $y_n = r_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $u = (u_n)$ un élément de E.

   (a) Démontrer qu'il existe un couple (λ, μ) de réels tels que

   $$\begin{cases} u_0 = \lambda x_0 + \mu y_0 \\ u_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 \end{cases}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. Qu'en résulte-t-il pour le couple de suites (x, y) de E ?

   (c) Démontrer que (x, y) est une base de E. Une suite de E peut-elle être convergente ?

5. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet une solution unique ("double") $r \in \mathbb{R}$. On définit $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ par $x_n = r^n$ et $y_n = n\, r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) En procédant comme au 4., démontrer que (x, y) est une base de E.

   (b) Dans quels cas une suite de E peut-elle être convergente ?

6. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet deux solutions complexes conjuguées $r\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\, \omega}$. On définit $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ où $x_n = r^n \cos(n\, \omega)$ et $y_n = r^n \sin(n\, \omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Énoncer et démontrer un résultat analogue au 4. et au 5. dans ce cas.

   (b) Dans quels cas une suite de E peut-elle être convergente ?

7. On définit la suite (f_n) par $f_0 = f_1 = 1$ et : $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer une expression directe (non récurrente) de f_n en fonction de n.
   En déduire un équivalent de (f_n).

—————— FIN ——————