Familles de polynômes

Partie I *Polynômes (interpolateurs) de* LAGRANGE

Soient a_1, ..., a_n n réels *distincts* et b_1, ..., b_n n réels.

1. On définit les *polynômes élémentaires de* LAGRANGE L_1, ..., L_n par :

$$L_i = \frac{1}{\prod\limits_{j \neq i} (a_i - a_j)} \prod_{j \neq i} (X - a_j) \, .$$

   Que vaut $L_i(a_k)$? [On distinguera $i = k$ de $i \neq k$.] Que vaut $\deg(L_i)$?

2. On définit $A = \sum_{i=1}^{n} b_i \, L_i$: *polynôme interpolateur de* LAGRANGE associé à $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$.

   (a) Calculer $A(a_1)$, ..., $A(a_n)$. Que peut-on dire de $\deg(A)$?

   (b) Démontrer que A est l'*unique* polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

3. Démontrer l'équivalence, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, entre :

   (a) $P(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$;

   (b) Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A + Q \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

Partie II *Polynômes de* CHEBYCHEV

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'*il existe* un *unique* polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \sin((2n+1)\theta) = P_n(\sin \theta).$$

   Calculer P_0 et P_1.

2. Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-1)$. Comparer P_n et $P_n(-X)$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_{n+1} - P_n$.

4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $E_n = \{x \in [-1, 1] \mid P_n(x) = 0\}$. Démontrer que $\mathrm{card}(E_n) = 2n + 1$. On écrit $E_n = \{a_k \mid -n \leq k \leq n\}$ où $a_{-n} < a_{-(n-1)} < \ldots < a_{-1} < a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.
   Calculer a_k.

6. On pose $A_n(X) = \prod_{k=-n}^{n} (X - a_k)$. Exprimer P_n à l'aide de A_n.

7. Soit $F_n = \{x \in \,]-1, 1[\mid P_n'(x) = 0\}$. Démontrer que $\mathrm{card}(F_n) = 2n$. On écrit $F_n = \{b_k \mid -n \leq k < n\}$ où $b_{-n} < b_{-(n-1)} < \ldots < b_{-1} < b_0 < b_1 < \ldots < b_{n-1}$.
   Calculer b_k. Placer les b_k par rapport aux a_k.

8. Construire la courbe représentative de la restriction de P_2 à $I = [-1, 1]$.