Les cinq "solides platoniciens"

On sait qu'on peut "paver" le plan euclidien par des polygones réguliers convexes, deux à deux isométriques ; le paver, c'est-à-dire le recouvrir (tout point du plan appartient à au moins un polygone), mais sans empiètement : un point commun à deux polygones, appartient nécessairement à leurs frontières. Toutefois ceci n'est possible que si ces polygones sont : des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones.

De la même manière, on peut paver l'espace euclidien à trois dimensions avec des cubes. Or, on démontre — et on admettra dans toute la suite — qu'il n'y a que cinq types de polyèdres réguliers convexes :

- les tétraèdres réguliers : un tel tétraèdre a 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces ; chacune d'elles est un triangle équilatéral (Fig.1).
- les cubes : un cube a 8 sommets, 8 arêtes, 6 faces (qui sont des carrés) (Fig.2).
- les octaèdres : un octaèdre a 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces ; chaque face est un triangle équilatéral ; les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un octaèdre régulier ; les centres des faces d'un octaèdre régulier sont les sommets d'un cube (Fig.3).
- les dodécaèdres : un tel polyèdre a 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces ; chacune d'elles est un pentagone régulier convexe (Fig.4).
- les icosaèdres : un tel polyèdre a 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces, chacune d'elles est un triangle équilatéral ; les extrémités des cinq arêtes issues d'un sommet sont les cinq sommets d'un pentagone régulier convexe. (Fig.5).

Cela posé :

- dans la partie I, on établira des résultats utiles pour la suite ;
- dans la partie II, on cherchera si l'espace peut être pavé par des polyèdres réguliers convexes, deux à deux isométriques, autres que des cubes.

Partie I

Soient, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, trois demi-droites Ox, Oy, Oz non coplanaires, issues d'un même point O ; on désigne par $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ leurs trois vecteurs unitaires et on pose :

$$a = \arccos\left(\vec{\jmath}\cdot\vec{k}\right),\ b = \arccos\left(\vec{k}\cdot\vec{\imath}\right),\ c = \arccos\left(\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}\right)\ ;$$

les deux formules

$$\vec{\jmath} = \cos c\ \vec{\imath} + \sin c\ \vec{u} \text{ et } \vec{k} = \cos b\ \vec{\imath} + \sin b\ \vec{v}$$

définissent deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; soit

$$\alpha = \arccos\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right).$$

1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux à $\vec{\imath}$; quelle est la signification géométrique de α pour les deux demi-plans limités à la droite qui porte Ox et qui contiennent respectivement les deux demi droites Oy et Oz ?
2. Démontrer la formule (dite *formule fondamentale de la trigonométrie sphérique*) :

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha}$$

Partie II

Soit P un polyèdre convexe ; deux faces adjacentes, c'est-à-dire limitées à une même arête commune, forment un angle dièdre dont la valeur, θ, ne dépend que du type de polyèdre régulier considéré ($0 < \theta < \pi$) ; pour un cube θ vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit P un tétraèdre régulier de sommets $ABCD$ (Fig.1) ; soit θ_t l'angle dièdre de deux faces, par exemple des faces ABC et ABD ; calculer $\cos\theta_t$ et vérifier que le nombre h_t défini par $\theta_t = \frac{2\pi}{h_t}$ n'est pas entier ; il existe donc (et on le *démontrera* sans avoir à calculer numériquement h_t à l'aide de tables ou autrement) un entier k_t, tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_t+1} < \theta_t < \frac{2\pi}{k_t}$; donner k_t.

2. De même, si P est un octaèdre régulier, deux faces adjacentes forment un angle dièdre θ_ω ; calculer $\cos\theta_\omega$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier k_ω tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_\omega+1} < \theta_\omega < \frac{2\pi}{k_\omega}$.

3. P étant un dodécaèdre, deux faces adjacentes forment un angle dièdre qu'on note θ_δ ; calculer $\cos\theta_\delta$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier k_δ tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_\delta+1} < \theta_\delta < \frac{2\pi}{k_\delta}$.

4. Enfin P étant un icosaèdre régulier convexe, deux faces adjacentes, les faces ABC et ABD de la figure 5, par exemple, forment un angle dièdre qu'on note θ_i ; calculer $\cos\theta_i$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier k_i tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_i+1} < \theta_i < \frac{2\pi}{k_i}$.

5. Que déduire des résultats précédents sur la possibilité ou l'impossibilité de paver l'espace à trois dimensions par des polyèdres réguliers autres que des cubes ?

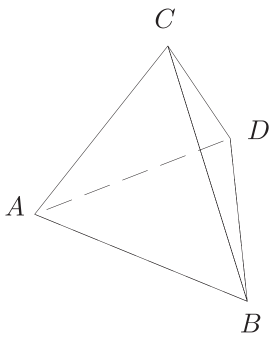

Fig.1 (tétraèdre)

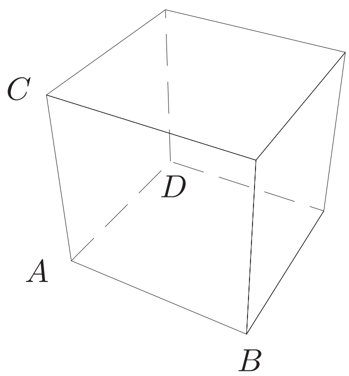

Fig.2 (cube)

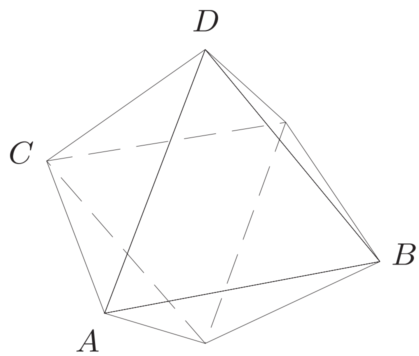

Fig.3 (octaèdre)

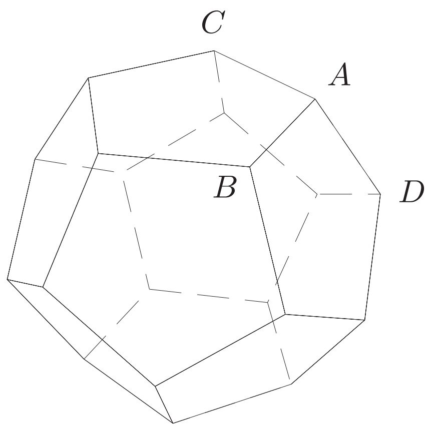

Fig.4 (dodécaèdre)

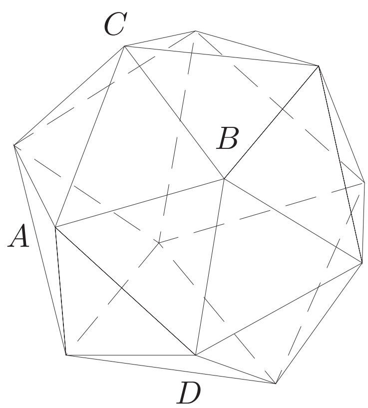

Fig.5 (icosaèdre)

——— FIN ———

[D'après Mines-Ponts 82 M - P' - TA épreuve pratique.]