Méthode du pivot

Partie I *Théorie*

On note $\mathcal{E} = (E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
On définit les matrices suivantes appelées *matrices de manipulation* :

- $$P_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & (i) & & (j) & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \quad \text{pour } i \neq j \ ;$$

- $$M_i^\alpha = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & (i) & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{K}^* \ ;$$

- $$S_{i,j}^\alpha = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & (j) & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ & & 1 & & \alpha & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \quad \text{pour } i \neq j \ ;$$

1. Exprimer ces matrices de manipulation en fonction des matrices élémentaires $E_{i,j}$ et de I_n.

2. Déterminer l'effet sur une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la multiplication à droite de A par une matrice de manipulation. (Càd, calculer le produit matriciel AM où M est une matrice de manipulation, dans les trois cas possibles.) On décrira le résultat de manière simple et globale en fonction de la matrice M. Que donnerait une multiplication à gauche ?

   Déduire de ces remarques que les matrices de manipulations sont inversibles.

   Par la suite on désignera indifféremment par la même notation la matrice de manipulation et l'opération[1] qu'elle effectue sur la matrice A.

[1] dite *opération élémentaire*

3. On suppose maintenant la matrice A *inversible* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   (a) Que peut-on dire de la famille des vecteurs-colonne (*resp.* -ligne) de A ? Justifier qu'il existe un coefficient $a_{1,j}$ non nul sur la première ligne de A. (*pivot*)

   (b) En déduire que, par une suite finie d'opérations élémentaires ($P_{i,j}$, M_i^α, $S_{i,j}^\alpha$) on peut transformer la matrice A en une matrice A' dont la première ligne est $(1\,0\,0\ldots0)$. Dire pourquoi A' est encore inversible.

   (c) Pourquoi existe-t-il un coefficient $a'_{2,j}$, $\boldsymbol{j \geq 2}$, non nul sur la deuxième ligne de A' ? En déduire que celle-ci peut être transformée par opérations élémentaires en une matrice A'' dont la deuxième ligne est $(0\,1\,0\ldots0)$.

   (d) En déduire que par une suite finie $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ d'opérations élémentaires on peut passer de la matrice A à la matrice I_n. Combien vaut p au maximum ?

   (e) Expliquer pourquoi la *même* suite d'opérations, *dans le même ordre*, effectuées à partir de la matrice I_n, donne la matrice A^{-1}. (*méthode du pivot*)

4. Que se passerait-il si l'on tentait d'appliquer la méthode du pivot à une matrice non inversible ?

Partie II *Pratique*

Calculer grâce à la méthode précédente les inverses des matrices suivantes, s'ils existent :

1.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ;$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ;$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} ;$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} ;$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} ;$$

7. la même dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

——— FIN ———