Partie entière

On considère la fonction *partie entière* :

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\ ;\ x \mapsto E(x).$$

On rappelle que l'entier $E(x)$ est caractérisé par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

ce qu'on peut encore énoncer : $E(x)$ est le *plus grand entier inférieur ou égal à x.*

1. Démontrer que E est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$.
   On pose $D(x) = x - E(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (partie décimale).
   Démontrer que D est périodique et que : $0 \leq D(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Tracer les "courbes" représentatives de E et D. E est-elle strictement croissante ?

2. Essayez de calculer avec votre machine[1] la partie entière de $-7{,}4$ ainsi que sa partie décimale.
   [rappel] Comment *Maple*® note-t-il la fonction partie entière ?

3. Démontrer que $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$. Dans quels cas a-t-on égalité ?
   [On pourra utiliser $D\,(x)$ et $D\,(y)$.]
   Comment peut-on, d'autre part, majorer $E(x + y)$ en fonction de $E\,(x)$ et $E\,(y)$?

4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$D(x) + D(-x) = \chi_{\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

   (fonction caractéristique de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$).

5. Démontrer que si x, $y \in \mathbb{R}$, $E\,(x) + E\,(x + y) + E\,(y) \leq E\,(2x) + E\,(2y)$.

6. Démontrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

   (a) $n\,E(x) \leq E(n\,x) \leq n\,E(x) + n - 1$;

   (b) $E\left(\frac{E(n\,x)}{n}\right) = E(x)$;

   (c) $E(n\,x) = \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n})$.

7. On se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E\left((1 + \sqrt{3})^{2n+1}\right)$ est divisible par 2^n.
   Pour cela, on effectuera les étapes suivantes :

   (a) Démontrer que $E_n \overset{\text{déf.}}{=} E\left((1 + \sqrt{3})^{2n+1}\right) = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$.

   (b) Calculer $\left[(1 + \sqrt{3})^{2n-1} - (\sqrt{3} - 1)^{2n-1}\right]\left[(1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 1)^2\right]$ de deux façons.
   En déduire de cela une relation entre E_n, E_{n-1} et E_{n-2}.

   (c) Conclure à l'aide d'une récurrence ("faible") après avoir calculé E_0 et E_1.

   (d) Que peut-on dire de la parité de l'entier E_n ?

[1] Attention, les calculatrices disposent souvent de "plusieurs" fonctions "partie entière". Il faudra rechercher la "bonne" fonction, qui ne porte pas le même nom selon les marques...