Moyenne arithmético-géométrico-harmonique

On définit trois suites de réels par la donnée de leurs premiers termes $u_0 \geq v_0 \geq w_0 > 0$ et les relations de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(u_n + v_n + w_n\right) \\ v_{n+1} & = & \sqrt[3]{u_n\, v_n\, w_n} \\ \dfrac{3}{w_{n+1}} & = & \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{w_n} \end{array} \right.$$

0. Justifier que u_n, v_n et w_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans les parties I. et II., n_0 désigne un entier naturel *fixé*.

Partie I *Comparaison de u_{n_0+1} et v_{n_0+1}*

1. Etudier la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi\left(x\right) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$$

(avec b, $c \geq 0$).

2. En déduire le signe de φ.
3. En déduire la position relative de u_{n_0+1} et v_{n_0+1}.

Partie II *Comparaison de v_{n_0+1} et w_{n_0+1}*

1. Etudier la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\psi\left(x\right) = x^3b^3 + x^3c^3 + b^3c^3 - 3x^2b^2c^2$$

(avec b, $c \geq 0$).

2. En déduire son signe.
3. En déduire la position relative de v_{n_0+1} et w_{n_0+1}.
4. Conclure sur les positions relatives des trois suites.

Partie III *Variations et convergence*

1. Etudier les variations de (u_n).
   En déduire que (u_n) est convergente vers une limite ℓ_1.
2. Etudier les variations de (w_n).
   En déduire que (w_n) est convergente vers une limite $\ell_3 \leq \ell_1$.
3. En déduire que (v_n) converge vers une limite $\ell_2 \in [\ell_3, \ell_1]$.
4. Démontrer que $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 \in [w_0, u_0]$.
   [On utilisera le 3. et une relation algébrique vérifiée par ces trois limites.]

—————— FIN ——————