Matrices de Gram

Partie I *Matrices de* Gram

E est un $\mathbb{R}$ev muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de vecteurs de E. On pose :

$$\begin{aligned} V(a_1, ..., a_p) &= \langle a_1, ..., a_p \rangle \ ; \\ \Phi(a_1, ..., a_p) &= ((a_i|a_j))_{1 \le i,\, j \le p} \ (\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})) \ ; \\ G(a_1, ..., a_p) &= \det(\Phi(a_1, ..., a_p)). \end{aligned}$$

1. Soient C, ..., C_p les vecteurs-colonne de $\Phi(a_1, ..., a_p)$ dans $\mathbb{R}^p$.
   Démontrer que si λ_1, ..., $\lambda_p \in \mathbb{R}^p$ il y a équivalence entre les énoncés :

   (a) $\sum_{k=1}^{p} \lambda^k a_k = 0_E$ et (b) $\sum_{k=1}^{p} \lambda^k C_k = 0_{\mathbb{R}^p}$.

2. En déduire que $(a_i)_{1 \le i \le p}$ est libre *si et seulement si* $\Phi(a_1, ..., a_p) \in GL_p(\mathbb{R})$.

3. Plus généralement, démontrer que :

$$\mathrm{rg}(\Phi(a_1, ..., a_p)) = \mathrm{rg}(a_1, ..., a_p) \ (= \dim_{\mathbb{R}}(V(a_1, ..., a_p))).$$

Partie II *Application à l'étude d'une famille de polynômes*

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire quelconque $(\cdot|\cdot)$.
Si $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{P \in E \mid \deg(P) \le n\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un polynôme T_n et un seul tel que :

   (1) $\deg(T_n) = n$; (2) T_n unitaire[1] et (3) $T_n \in E_{n-1}^{\perp}$.

   [On écrira $T_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k X^k$ pour tenir compte de (1) et (2) et on utilisera le I.]

2. On pose de plus $T_0 = 1$.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_i)_{0 \le i \le n}$ est une base orthogonale de E_n.

3. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthogonale telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(S_n) = n$. On note σ_n le coefficient dominant de S_n. Calculer S_n à l'aide de σ_n et de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie III *Application au calcul de la distance à un sev*

E est de nouveau un ev euclidien quelconque. On reprend les notations du I.

1. On suppose que a_1, ..., a_p appartiennent à un sev F de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ ([2]). On choisit une base *orthonormale* $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \le i \le p}$ de F. On note $A = \mathrm{mat}(a_1, ..., a_p\, ; \mathcal{U})$ ($\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$). Démontrer que :

$$^tA \times A = \Phi(a_1, ..., a_p).$$

2. En déduire que $G(a_1, ..., a_p) \ge 0$ et que : $(a_i)_{1 \le i \le p}$ libre $\Leftrightarrow G(a_1, ..., a_p) > 0$.

3. Soit F un sev de E, de dimension $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{A} = (a_i)_{1 \le i \le p}$ est une base de F. Démontrer que pour tout vecteur x de E la distance de x à F est donnée par :

$$d(x\, ; F)^2 = \frac{G(x, a_1, ..., a_p)}{G(a_1, ..., a_p)}.$$

[1] *au sens des polynômes*, càd de coefficient dominant égal à 1.
[2] ce qui est légitime, puisque $\mathrm{rg}\,(a_1, ..., a_p) \le p$.