Étude d'une rotation de E_3

E_3 est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et de base OND $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

Partie I *Expression vectorielle d'une rotation*

1. Si r est la rotation d'axe dirigé *et orienté*[1] par le vecteur unitaire w et d'angle de mesure θ (modulo 2π), démontrer que l'image d'un vecteur y orthogonal à l'axe est donnée par
$$r(y) = \cos\theta.y + \sin\theta.w \wedge y.$$
2. Soit x un vecteur quelconque de E_3.
   (a) Quelle est l'expression de la décomposition de x sur $\langle w\rangle \oplus_\perp w^\perp$?
   (b) En déduire que l'image de x par r est donnée par :
$$r(x) = \cos\theta.x + (1-\cos\theta)(x \mid w).w + \sin\theta.w \wedge x.$$
3. En déduire les expressions de r^{-1} puis de $r - r^{-1}$.

Partie II *Interprétation des matrices antisymétriques*

1. Soit $a \in E_3$. On note $T_a : E_3 \to E_3$; $x \mapsto a \wedge x$.
   (a) Démontrer que T_a est un endomorphisme de E_3.
   (b) On note $a = pu + qv + rw$. Déterminer $\operatorname{mat}(T_a ; \mathcal{B})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Démontrer qu'il existe un unique $a \in E_3$ tel que $A = \operatorname{mat}(T_a ; \mathcal{B})$.

Partie III *Plan d'étude d'une matrice orthogonale*

On définit la matrice
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
et on note f l'endomorphisme de E_3 représenté par M dans une BOND $\mathcal{U}$ de E_3.

1. Démontrer que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\varepsilon = \det(M)$ et en déduire que f est une rotation de E_3.
3. Calculer $\operatorname{tr}(M)$ et en déduire la valeur de "$\cos\theta$" (notation du cours).
4. Calculer $A = M - {}^tM$. Constater que A est antisymétrique et en déduire avec II.2. *le* vecteur a de E_3 tel que $A = \operatorname{mat}(T_a ; \mathcal{B})$.
5. En reprenant les notations du I., vérifier que $a = 2\sin\theta.w$.
6. Conclure complètement (à l'aide d'un schéma) quant à a nature géométrique de f.

[1] Cela signifie que la mesure des angles orientés dans le plan $P = w^\perp$ se fait en munissant P de l'orientation induite par celle de E_3 et le vecteur w.