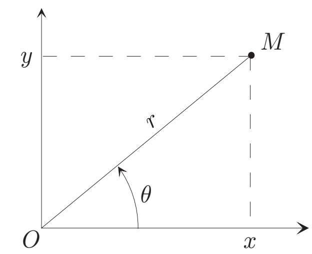
Laplacien

Partie I *Laplacien "en polaires"*

Le passage en coordonnées polaires dans le plan se traduit par l'application

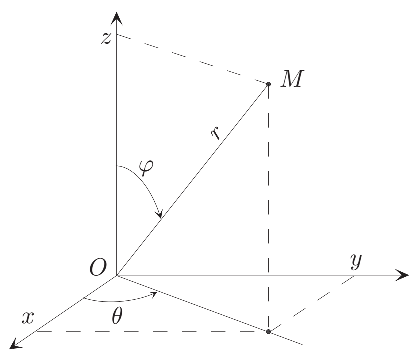


$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \binom{r}{\theta} & \mapsto & \binom{r\cos\theta}{r\sin\theta} \end{array} \right.$$

1. Calculer la matrice jacobienne de φ, ainsi que le jacobien $J_\varphi(r, \theta)$.
2. Rappeler l'expression de la différentielle de l'application
$$g = f \circ \varphi : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta)$$
en fonction de $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}\varphi$.
3. En déduire
   (a) les expressions de $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de r, θ et des dérivées partielles de f en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
   (b) les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction de r, θ et des dérivées partielles de g en (r, θ). [*Indication* : on inversera le système précédent.]
   (c) les valeurs de $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ (en (r, θ)).
4. Quelle est l'inverse de la matrice jacobienne de φ ? Quelle remarque peut-on faire ?
5. Calculer comme en 3.(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et enfin Δf en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. [*Réponse* : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial g}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.]

Partie II *Laplacien "en sphériques"*

Le passage en coordonnées sphériques dans l'espace se traduit par l'application



$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Calculer la matrice jacobienne de ψ, ainsi que le jacobien $J_\psi(r, \theta, \varphi)$.
2. Rappeler l'expression de la différentielle de l'application
$$g = f \circ \psi : (r, \theta, \varphi) \mapsto f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$
en fonction de $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}\psi$.
3. En déduire
   (a) les expressions de $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, \varphi)$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)$ et $\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi)$ en fonction de r, θ, φ et des dérivées partielles de f en $(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$.
   (b) les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ en $(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$, en fonction de r, θ, φ et des dérivées partielles de g en (r, θ, φ). [*Indication* : on résoudra *élégamment* le système précédent.]
   (c) les valeurs des dérivées partielles de r, θ et φ par rapport à x, y et z en (r, θ, φ).
4. Calculer comme en 3.(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ et enfin Δf en $(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$.
[*Réponse* : $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right]$.]

———— FIN ————