Groupes diédraux

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on appelle *groupe diédral d'indice* n, et on note $\mathbb{D}_n$, l'ensemble des isométries du plan $\mathcal{P}$ qui laissent invariant (globalement) un polygone régulier $\Pi_n = (A_1, ..., A_n)$ à n côtés.

On rappelle que les isométries planes se répartissent en

- isométries directes : translations et rotations (dont l'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$) ;
- isométries indirectes : symétries par rapport aux droites.

Partie I *Généralités*

1. Pourquoi $(\mathbb{D}_n, \circ)$ est-il un groupe ?
2. Pourquoi le centre de gravité G du polygone Π_n est-il invariant par toute isométrie $f \in \mathbb{D}_n$?
3. En déduire que
   (a) la seule translation appartenant à $\mathbb{D}_n$ est la translation triviale $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$;
   (b) toute rotation de $\mathbb{D}_n$ est de centre G ;
   (c) toute symétrie de $\mathbb{D}_n$ a un axe passant par G.

Partie II *Groupe du triangle*

On suppose $n = 3$: Π_3 est un triangle (A, B, C).

1. Déterminer toutes les rotations de $\mathbb{D}_3$ [on pourra étudier l'image de A].
2. Déterminer toutes les symétries de $\mathbb{D}_3$ [même suggestion].
3. Dresser la table du groupe $\mathbb{D}_3$ pour la loi $\circ$.
4. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{D}_3, \circ)$.
   [Pour cela on pourra mettre à profit le résultat suivant (admis) : *le cardinal d'un sous-groupe d'un groupe H est un* diviseur *du cardinal de H*. (th. de LAGRANGE).]

Partie III *Groupe du carré*

On suppose $n = 4$: Π_4 est un carré (A, B, C, D).

1. Déterminer toutes les rotations, de $\mathbb{D}_4$.
2. Déterminer toutes les symétries de $\mathbb{D}_4$. [On mettra en évidence qu'elles sont de deux types.]
3. Dresser la table de $(\mathbb{D}_4, \circ)$.
4. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{D}_4, \circ)$.

Partie IV *Retour au cas général*

n est de nouveau quelconque (≥ 3).

1. Déterminer toutes les rotations, de $\mathbb{D}_n$.
2. En distinguant selon la parité de n, déterminer toutes les symétries appartenant à $\mathbb{D}_n$.
   En déduire le cardinal de $\mathbb{D}_n$.
3. Prouver par un contre-exemple que $\mathbb{D}_n$ n'est jamais *commutatif*.

———— FIN ————