Fonction de Van der Waerden

Partie I *Définition de la fonction F de* Van der Waerden

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_0(x) = \frac{1}{2}\left((-1)^{E(2x)}\left(2x - E(2x) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$.

1. (a) En s'aidant d'une machine, représenter graphiquement la fonction f_0 et déterminer $\sup_{\mathbb{R}} f_0$.
   (b) Démontrer que f_0 est périodique et 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = \frac{1}{2^n}\, f_0(12^n x)$.
   (a) Démontrer que f_n est $\frac{1}{12^n}$-périodique et que $\sup_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.
   (b) Démontrer que $f_n(x)$ est 6^n-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$. Démontrer que la *suite* $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. On notera $F(x)$ sa limite.

Partie II *Étude de la continuité de F*

1. Démontrer que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \le F(x) - F_n(x) \le \frac{1}{2^{n+1}}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{\varepsilon}{3}$.
   (a) Démontrer que si $x,\ y \in \mathbb{R}$, $|F(x) - F(y)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + |F_N(x) - F_N(y)|$.
   (b) En déduire que : *F est continue sur $\mathbb{R}$.*

Partie III *Étude de la dérivabilité de F*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $\delta,\ \mu \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $6^{m-2} > \mu$ et $\frac{1}{12^m} < \delta$.
2. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{k}{2.12^m} \le a < \frac{k+1}{2.12^m}$.
   On pose $x_i = \frac{k+i-2}{2.12^m}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Remarquer que $x_1 < x_2 \le a < x_3 < x_4$.
3. Démontrer que si $j > m$, $f_j(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. En déduire que $F(x_i) = \sum_{j=0}^{m} f_j(x_i)$.
4. Démontrer que $|f_m(x_3) - f_m(x_2)| = 6^m|x_3 - x_2|$ et $|f_m(x_4) - f_m(x_1)| = \frac{6^m}{3}|x_4 - x_1|$.
5. (a) En utilisant I.2.(b), démontrer que $\left|\sum_{n=0}^{m-1} f_n(x_i) - f_n(x_j)\right| \le \frac{6^m}{5}|x_i - x_j|$.
   (b) En déduire que $|F(x_3) - F(x_2)| > \mu(x_3 - x_2)$ et $|F(x_4) - F(x_1)| > \mu(x_4 - x_1)$.
   (c) Démontrer que $F(x_3) - F(x_2)$ et $F(x_4) - F(x_1)$ sont de signes contraires.
6. (a) En utilisant l'égalité $\frac{F(x_4)-F(x_1)}{x_4-x_1} = \frac{a-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{F(a)-F(x_1)}{a-x_1} + \frac{x_4-a}{x_4-x_1}\cdot\frac{F(x_4)-F(a)}{x_4-a}$, démontrer que
   $$\left|\frac{F(a)-F(x_1)}{a-x_1}\right| > \mu \text{ ou } \left|\frac{F(x_4)-F(a)}{x_4-a}\right| > \mu.$$
   (b) En opérant de même pour x_2 et x_3 démontrer que le rapport $\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie) quand $x \to a$. En particulier : *F n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.*
   (c) A quoi peut bien ressembler la représentation graphique de F ?

——— FIN ———