Développements limités généralisés

Partie I *Démonstration de la méthode sur un exemple*

On souhaite étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2-2x-1}{x}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\ ,$$

pour cela, on effectue un “développement limité en $+\infty$” de f de la façon suivante :

1. On pose $t = \frac{1}{x}$ (donc : $t \to 0^+$) définissant $g(t) = f(\frac{1}{t}) = \frac{1/t^2-2/t-1}{1/t}\ \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{t}\,(1-2t-t^2)\ \mathrm{e}^{-t}$.
2. A cause du $\frac{1}{t}$, g n'admet pas de développement limité en $0^{(+)}$, par contre c'est le cas de $h(t) = t\,g(t)$.
3. On calcule alors un DL en 0 à l'ordre 2 (car on va diviser par t) de h. Il s'agit d'un produit :
   $1-2t-t^2 = 1-2t-t^2+o(t^2)\,[t\to 0]$ $(= 1-2t-t^2+o(\text{n'importe quoi}))$;
   $\mathrm{e}^{-t} = 1-t+\frac{1}{2}\,t^2+o(t^2)\,[t\to 0]$; d'où en multipliant :
   $h(t) = 1-3t+\frac{3}{2}\,t^2+o(t^2)\,[t\to 0]$; puis en divisant par t :
   $g(t) = \frac{1}{t}-3+\frac{3}{2}\,t+o(t)\,[t\to 0]$ (attention, ceci n'est pas un DL à cause du $\frac{1}{t}$).
4. On revient ensuite à x par $f(x) = g(\frac{1}{x}) = x-3+\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})\,[x\to+\infty]$, et là tout se voit :

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{x}_{\text{limite } a=1 \text{ de } \frac{f(x)}{x}} \quad \underbrace{-3}_{\text{limite } b=-3 \text{ de } f(x)-a\,x}}_{\substack{\text{asymptote d'équation } y=a\,x+b\\ \text{en } +\infty}} \quad \underbrace{+\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})\,[x\to+\infty]}_{\substack{f(x)-a\,x-b\,\sim_{+\infty}\,\frac{3}{2x}\\ \text{donc est du signe } (\,>0) \text{ de } \frac{3}{2x}\\ \text{en } +\infty \text{ donc “courbe au-dessus”}}}$$

Ce calcul et sa conclusion sont-ils valables en $-\infty$?

Partie II *Etude d'autres exemples*

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier les branches infinies de la courbe représentative à l'aide d'un DL généralisé. (On commencera par préciser le domaine de définition.)

1. $(x^2-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$;
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2}$ (on n'effectuera pas l'étude des variations) ;
3. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;
4. $f(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;
5. $f(x) = \left(\frac{x^3}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Compléter ensuite l'étude de f en précisant notamment les limites aux bornes du domaine, les éventuels prolongements par continuité et les variations.

——————— FIN ———————