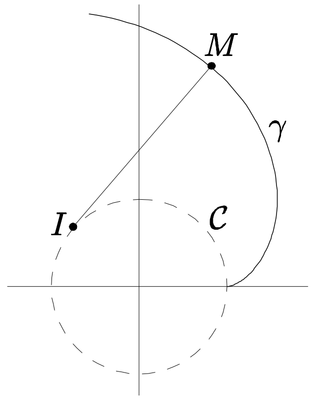
Développante de cercle

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon a, paramétré sous la forme $t \mapsto I(t) : \begin{cases} X(t)=a\cos t \\ Y(t)=a\sin t \end{cases}$.
On cherche une courbe γ dont la développée soit égale à $\mathcal{C}$. γ est appelée une *développante* de $\mathcal{C}$.
Il est donc *nécessaire* que les normales à γ soient tangentes à $\mathcal{C}$.

Question préliminaire



La notion de développante est hors-programme. Néanmoins, en utilisant un argument heuristique issu de l'image du "fil qu'on déroule[1]", expliquer pourquoi γ est le lieu des points $I_0 - s_0\vec{t_0}$ où I_0, s_0 et $\vec{t_0}$ sont respectivement un point de $\mathcal{C}$, l'abscisse curviligne et le vecteur normé tangent associés.

En déduire qu'un paramétrage de γ est donné par :

$$(\gamma) : t \mapsto M(t) : \begin{cases} x(t) = a(\cos t + t\sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}.$$

Partie I *Étude affine*

1. Préciser l'axe de symétrie de γ.
2. Étudier γ au voisinage du point M_0 de paramètre $t = 0$.
3. Déterminer une équation polaire de γ sous la forme $\rho = f(t)$ (attention, t ne représente pas l'angle polaire *pour* γ). En déduire la nature de la branche infinie de γ.
4. Effectuer l'étude de γ sur $[-\pi, \pi]$. (Pourquoi ce domaine d'étude est-il pertinent ?)

Partie II *Étude métrique*

On justifie maintenant rigoureusement que la développée de γ est bien égale à $\mathcal{C}$.

1. Soit M un point de γ de paramètre t. Calculer le vecteur tangent $\vec{t}$, le vecteur normal $\vec{n}$, l'abscisse curviligne s, l'angle $\varphi = \left(\widehat{\vec{\imath}, \vec{t}}\right)$, la courbure ρ et le rayon de courbure R correspondants.
2. Déterminer le centre de courbure I de γ en M.
   Vérifier que la développée de γ est bien le cercle $\mathcal{C}$.

Partie III *Une propriété de la développante de cercle*

1. Pour $t \in [0, \pi]$, calculer le vecteur $\overrightarrow{M(t-2\pi)\,M(t)}$ ainsi que sa norme.
2. Faire un schéma expliquant l'interprétation géométrique de ce résultat et l'application cinématique que l'on peut en donner.

---

[1] Si l'on déroule, en le maintenant tendu, un fil enroulé sur $\mathcal{C}$, la courbe décrite par un point de ce fil est γ.