Un exemple de calcul de déterminant $n \times n$

a et b étant deux réels positifs, on désigne par

- $M_n(a,b)$ la matrice d'ordre n, $n \geq 2$:

$$M_n(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -a & \cdots & -a \\ -b & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a \\ -b & \cdots & -b & 1 \end{pmatrix} ;$$

- $D_n(a,b)$ le déterminant de $M_n(a,b)$.

1. Calculer $D_2(a,b)$ et $D_3(a,b)$.
2. Quelle relation y a-t-il entre $D_n(a,b)$ et $D_n(b,a)$?
3. (a) Pour $a \neq b$, montrer que

$$D_{n+1}(a,b) = f(a)D_n(a,b) + g(a,b),$$

   où $f(a)$ et $g(a,b)$ sont des fonctions que l'on déterminera.

   (b) En déduire que

$$D_n(a,b) = \frac{b(1+a)^n - a(1+b)^n}{b-a}.$$

4. Calculer $D_n(a,a)$.
5. Soit a un réel fixé.
   (a) Déterminer $\lim_{b \to a} D_n(a,b)$.
   (b) Quelle remarque peut-on faire ?
6. On suppose désormais que $0 \leq a < b$.
   (a) Montrer que $D_n(a,a) > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{n-1}$.
   (b) Montrer qu'une condition suffisante pour que $D_n(a,b) > 0$ est que $b \leq \frac{1}{n-1}$.

——————— FIN ———————

[D'après ENSAIT Roubaix 1987 maths 1 partiel.]