# Algèbre et géométrie $\mathbb{C}$

**Partie I** *Racines carrées d'un complexe.*

Soit $Z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. On se propose de déterminer les complexes $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ tels que $z^2 = Z$.
On est donc conduit à résoudre $z^2 = (\alpha + \mathrm{i}\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta\,\mathrm{i}$ d'où le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ 2\alpha\beta = y \end{cases} ; \tag{S}$$

auquel il est pratique d'ajouter la condition $|z|^2 = |Z|$ soit $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; en effet, connaissant $\alpha^2 - \beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$ on en déduit facilement $\alpha^2$ et $\beta^2$, et la condition sur $2\alpha\beta$ permet alors de déterminer ceux qui, des *quatre* complexes $\pm\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, sont effectivement les *deux* racines carrées de $Z$.

**Exemples :** Calculer les racines carrées de : (a) $Z = 3 - 4\mathrm{i}$ ; (b) $Z = 5 - 12\mathrm{i}$.

**Partie II** *Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.*

Soient $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{E}$$

1. Démontrer que (E) peut se mettre sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$ où $z_1$, $z_2$ sont des complexes que l'on exprimera en fonction de $a$, $b$, $c$ ainsi que d'une racine carrée $\delta$ du complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. En déduire que (E) admet *toujours* deux solutions dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues). Quelle remarque peut-on faire sur ces solutions lorsque $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ ?
3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   (a) $z^2 + z + 1 = 0$ ; (b) $z^2 + (1 + \mathrm{i})\,z + \mathrm{i} = 0$ ; (c) $z^2 + 5\mathrm{i}\,z - 4 = 0$.

**Partie III** *Géométrie dans $\mathbb{C}$.*

Dans le plan $P$ rapporté à un repère orthonormé, à tout point $M(x, y)$, on fait correspondre son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
À tout complexe $z$, $z \neq 2$, on associe le complexe $z'$ défini par :

$$z' = \frac{z - 10\mathrm{i}}{z - 2}.$$

1. Mettre $z'$ sous la forme $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où les réels $x'$ et $y'$ seront exprimés en fonction de $x$ et $y$.
2. Trouver l'ensemble des complexes $z$ tels que :

   (a) $z'$ soit un réel ; (b) $z'$ soit un imaginaire pur.

   Dans chaque cas, représenter les ensembles de points obtenus.
3. Soient $A$ le point d'affixe 2, $B$ celui d'affixe $10\mathrm{i}$.
   Donner une interprétation géométrique de l'argument de $z'$ et retrouver les résultats du 2.
4. (a) Déterminer les racines carrées du complexe $\frac{9}{4} - 10\mathrm{i}$.
   (b) Déterminer les complexes $z$ solutions de l'équation $z' = z$. [On obtiendra une équation du second degré en $z$ qu'on écrira sous la forme $(z - \alpha)^2 - \beta^2 = 0$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des complexes à calculer.]
   (c) Soient $I$ et $J$ les points images des solutions du (b) ($I$ est le point qui a une abscisse négative).
   Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})} = \widehat{(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})}$.

[D'après Ecole Polytechnique Féminine 1987 ex. 2]

——— FIN ———