Complément sur les champs de vecteurs

Partie I *Deux familles de courbes associées à un champ de gradients*

Dans cette partie $\vec{V}$ est un champ continu sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dérivant du potentiel scalaire $(\mathcal{C}^1)$ f.

1. *Lignes de champ.*
   On considère un arc $\mathcal{C}^1$ γ dans Ω. On se place au voisinage d'un point $M_0 = \gamma(t_0)$.

   (a) Exprimer la dérivée en t_0 de $f \circ \gamma$: $(f \circ \gamma)'(t_0)$.

   (b) Démontrer que $\left|(f \circ \gamma)'(t_0)\right|$ est maximale *ssi* $\vec{\gamma}'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M_0)$ (préciser en fonction du sens).

   L'arc γ est une *ligne de champ* de $\vec{V}$ si cette condition est vérifiée pour tout M_0 de son image. Que signifie ceci lorsque $n = 3$ et $z = f(x, y)$? (*ligne de plus grande pente*)

2. *Équipotentielles.*
   On envisage maintenant une équipotentielle de $\vec{V}$, càd un arc γ $(\mathcal{C}^1)$ tel que $f(\gamma(t)) = \lambda = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ (indépendante de t).
   Montrer qu'en tout point $M_0 = \gamma(t_0)$ de $\mathrm{Im}(\gamma)$, le vecteur tangent $\vec{\gamma}'(t_0)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M_0)$.

Ainsi, les lignes de champ et les équipotentielles sont des *trajectoires orthogonales.*

Partie II *Étude locale d'un champ*

$\vec{V}$ est ici un champ $\mathcal{C}^1$ quelconque sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit M_0 un point de Ω. On note $\varphi = \mathrm{d}\vec{V}(M_0)$ la différentielle de $\vec{V}$ en M_0, et $J = \mathrm{jac}_{M_0}(\vec{V})$ la matrice jacobienne de $\vec{V}$ en M_0. On a donc $J = \mathrm{mat}(\varphi\ ;\ \mathcal{E})$ ($\mathcal{E} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1. Rappeler l'expression de la décomposition unique $J = S + A$, S symétrique, A antisymétrique.
   On associe à cette décomposition matricielle la décomposition $\varphi = \varphi_s + \varphi_a$ où $S = \mathrm{mat}(\varphi_s\ ;\ \mathcal{E})$, $A = \mathrm{mat}(\varphi_a\ ;\ \mathcal{E})$.

2. *Étude de φ_s.*
   On note $S = (s_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On définit la "*forme quadratique*[1]" q par : si $\vec{x} = \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$,
   $$q(\vec{x}) = \sum_{i,j} s_{i,j} x^i x^j.$$

   (a) Pourquoi la fonction q est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$?

   (b) Vérifier que $\varphi_s(\vec{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}} q(\vec{x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3. *Étude de φ_a lorsque $n = 3$.*
   On suppose désormais que $n = 3$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 3}$.

   (a) On pose $\vec{w} = a_{3,2}\vec{e}_1 + a_{1,3}\vec{e}_2 + a_{2,1}\vec{e}_3 = (a_{3,2}, a_{1,3}, a_{2,1})$. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_a(\vec{x}) = \vec{w} \wedge \vec{x}$ et que $\vec{w}$ est l'unique vecteur ayant cette propriété.

   (b) Quelle relation de colinéarité très simple existe-t-il entre $\vec{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}(M_0)$?

   (c) *Interprétation cinématique du rotationnel.*
   On considère dans cette question que $\vec{V}$ est le champ des vitesses d'un solide en rotation autour de Oz. On utilise les coordonnées cylindriques et on note $M = O + r_0\vec{u}(\theta) + z_0\vec{k}$, r_0 et z_0 étant constants et θ seul étant fonction $(\mathcal{C}^1)$ de t.
   Vérifier que $\vec{V}(M(t)) = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$ pour un vecteur $\vec{w}$ que l'on précisera.

4. Déduire des questions précédentes et du DL à l'ordre 1 de $\vec{V}(M_0 + \vec{h})$ la décomposition (à $\vec{o}(\|\vec{h}\|)$ près) de $\vec{V}(M_0 + \vec{h}) - \vec{V}(M_0)$ ainsi que son interprétation géométrique.

---

[1] Voir cours de spé.