Les théorèmes de Cesaro

Partie I *Petit théorème de* Cesaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels indexée par $\mathbb{N}^*$. On lui associe la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *On suppose que* $\lim(u_n) = 0$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Démontrer que pour $n \geq N$, $|v_n| < \frac{|u_1|+...+|u_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) En déduire qu'il existe un entier N' tel que $n \geq N' \Rightarrow |v_n| < \varepsilon$ et conclure que (v_n) converge vers 0.

2. *On suppose que* $\lim(u_n) = a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - a$ et $v'_n = \frac{1}{n}(u'_1 + ... + u'_n)$. Exprimer v'_n en fonction de v_n et en déduire que (v_n) converge vers a.

3. *On suppose que* $\lim(u_n) = +\infty$.

   (a) Soir $A \in \mathbb{R}$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n > A + 1$. Démontrer que pour tout $n \geq N$, $v_n > \frac{u_1+...+u_{N-1}}{n} + \frac{n-N+1}{n}(A+1)$.

   (b) Conclure comme au 2. Que dire du cas où $\lim(u_n) = -\infty$?

Partie II *Grand théorème de* Cesaro

On considère ici une suite (a_n) de réels *strictement positifs.* On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$ et on suppose en outre que : $\lim(A_n) = +\infty$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{N}^*$, on lui associe maintenant

$$v_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} a_u u_k = \frac{a_1 u_1 + ... + a_n u_n}{a_1 + ... + a_n}.$$

1. Que représente v_n par rapport à u_1, ..., u_n ?
   En quoi est-ce une généralisation du I. ?

2. Adapter les énoncés et les démonstrations du I.1., 2. et 3. à ce cas général.

Partie III *Applications*

Effectuer les calculs suivants en précisant la version de Cesaro utilisée :

1. Soit (u_n) une suite de réels telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lim(\frac{u_n}{n}) = a$.

2. Si (u_n) converge vers a, que peut-on dire de $\left(\frac{u_1+2u_2+...+nu_n}{n^2}\right)$?

3. Même question avec $\left(\frac{\binom{n}{1}u_1+\binom{n}{2}u_2+...+\binom{n}{n}u_n}{2^n}\right)$. Essayer de trouver une démonstration locale dans ce cas.

4. Soit (u_n) une suite *monotone* de réels. Démontrer que la suite (v_n) définie comme au I. est convergente *si et seulement si* (u_n) est convergente. [Utiliser $2v_{2n} - v_n$.]

———— FIN ————