Arc paramétré ; parabole

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ (\vec{\imath},\vec{\jmath}))$. (Γ) est l'arc paramétré défini par l'application :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right) \\ y(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2 \end{array}\right. \end{array}$$

où $(x(t)\,,y(t))$ sont les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(O\ ;\ (\vec{\imath},\vec{\jmath}))$.

1. Quelles sont les valeurs de t pour lesquels le point $M(t)$ est singulier ?
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la tangente au point $M(t)$.
3. Décrire la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente aux points suivants :
   (a) au point O correspondant à la valeur $t=0$ du paramètre ;
   (b) au point A correspondant à la valeur $t=1$ du paramètre.
4. Représenter la courbe (Γ).
5. On considère deux points de (Γ) ; M de paramètre t et M_1 de paramètre t_1.
   (a) Montrer que, pour que les tangentes à (Γ) en M et en M_1 soient perpendiculaires, il faut et il suffit que :
   $$1+t\ t_1=0.$$
   (b) Soit P le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsqu'elles sont perpendiculaires. Démontrer que les coordonnées $(x_P(t),y_P(t))$ du point P en fonction de $t\in\mathbb{R}^*$ sont :
   $$\left\{\begin{array}{l} x_P(t)=\dfrac{t^4-3t^3-t^2+3t+1}{6t^2} \\ y_P(t)=\dfrac{-t^2+3t+1}{6t} \end{array}\right.$$
6. (a) Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à (Γ) est une parabole (Γ_1) dont une équation est :
   $$6y^2-3y-x+\frac{1}{6}=0.$$
   (b) Déterminer le sommet, le foyer, la directrice et l'axe de cette parabole.

——————— FIN ———————

[E3A 2004 PC maths B ex. 3/3]