Calcul approché d'intégrales

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on pose $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $i = 1, ..., n$.

Soit $f \in \mathrm{Int}([a, b], \mathbb{R})$. On approxime $I = \int_a^b f$ en ajoutant les approximations effectuées sur chacun des intervalles $[x_i,\, x_{i+1}]$. On posera $A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f$.

Partie I *Sommes de* RIEMANN *ou méthode des rectangles*

On remplace I par

$$S_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \ (\textit{resp.} S'_n = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)).$$

1. Faire un schéma représentant l'approximation ainsi effectuée.

2. Démontrer que $\left.\begin{array}{l}|I - S_n| \\ |I - S'_n|\end{array}\right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^1$.

   [On pourra IPP A_k après avoir remarqué que $B_k \overset{\text{déf.}}{=} (x_{k+1} - x_k)f(x_k) = [(t - x_{k+1})f(t)]_{x_k}^{x_{k+1}}$.]

3. Comparer S_n, I et S'_n si $f \nearrow$.

4. Pour quelles fonctions l'approximation effectuée est-elle exacte ?

Partie II *Méthode des trapèzes ou d'*EULER-MACLAURIN

On remplace I par

$$\begin{aligned} I_n &= h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \\ &= \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]. \end{aligned}$$

1. Illustrer par un schéma l'approximation effectuée. Exprimer I_n en fonction de S_n et S'_n.

2. Démontrer que $|I - I_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.

   [On pourra IPP deux fois A_k après avoir remarqué que

   $C_k \overset{\text{déf.}}{=} (x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = \left[(t - \frac{x_k+x_{k+1}}{2})f(t)\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$.]

3. Comparer I et I_n si f est convexe (*resp.* concave).

4. Pour quelles fonctions l'approximation effectuée est-elle exacte ?

5. *Application numérique* : $a = 0$, $b = 5$, $f(t) = \mathrm{e}^t$.

   Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour approximer I à 10^{-2} près dans chacune des méthodes précédentes.

   Comparer le majorant de l'erreur et l'erreur *effectivement* commise.

Partie III *Méthode des tangentes*

On remplace I par

$$J_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}).$$

1. Faire un schéma pour expliquer l'approximation effectuée.

2. Démontrer que $|I - J_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.
[On pourra justifier que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f = h\, f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}) + \frac{h^3}{24} f''(c_k)$ pour un $c_k \in\ ]x_k, x_{k+1}[$. Pour cela il sera commode de définir une primitive F de f et de poser $m = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$; $p = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}$.]

3. Que deviennent les remarques faites en 3. et 4. de la partie précédente ?

Partie IV *Méthode de* Simpson

On remplace I par

$$K_n = \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) + 4f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) + f(x_{k+1}) \right).$$

1. Démontrer le

Lemme *(formule des trois niveaux)* :

Si $u, v \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\int_u^v P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{v-u}{6} \left[P(u) + 4\ P(\frac{u+v}{2}) + P(v) \right].$$

2. A l'aide du lemme justifier que l'approximation de I par K_n revient à remplacer f par son polynôme interpolateur de Lagrange de degré ≤ 2 (interpolation "parabolique") en x_k, $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}. Exprimer K_n en fonction de I_n et J_n.

3. Démontrer que $|I - K_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^4$.
[On utilisera la formule de Simpson pour les fonctions dérivables.]

4. Pour quelles fonctions l'approximation ci-dessus est-elle exacte ?

5. *Application numérique* : $a = 0$, $b = 5$, $f(t) = \mathrm{e}^t$.
Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour approximer I à 10^{-5} près dans chacune des méthodes précédentes.
Comparer le majorant de l'erreur et l'erreur *effectivement* commise.

—————— FIN ——————