# Fonction caractéristique

$E$ est un ensemble ; $A$, $B$, $C$ désignent des parties de $E$.
Le complémentaire $E \setminus A = \complement_E A$ de $A$ sera noté simplement $\bar{A}$.
La *fonction caractéristique* de $A$ est l'application

$$\chi_A : \begin{array}{ccl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

(a) Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $A = [0,1]$, représenter graphiquement $\chi_A$.

(b) Démontrer que $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$ (ce qui justifie le nom donné à $\chi_A$).

**Partie I** *Propriétés élémentaires*

Démontrer les relations suivantes, valables quelles que soient les parties $A$ et $B$ de $E$ :

1. $\chi_A^2 = \chi_A$ ;
2. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$ ;
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$. Comment ce résultat se simplifie-t-il lorsque $A$ et $B$ sont *disjoints*[1] ?
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$ ;
5. $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ ;
6. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B$.

**Partie II** *Applications*

En utilisant les fonctions caractéristiques des parties $A$, $B$, $C$ de $E$, démontrer :

1. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
3. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ ;
4. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ;
5. $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$, et donner un contre-exemple où l'autre inclusion n'est pas vérifiée.

**Partie III** *Application à l'étude de la différence symétrique*

La *différence symétrique* de deux parties $A$ et $B$ de $E$ est la partie notée $A \triangle B$ définie par

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(*cf.* exercices de vocabulaire ensembliste).

1. Que vaut $\chi_{A\triangle B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$ ? Utiliser le résultat pour traiter les questions suivantes :
2. Démontrer que
   (a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (associativité de $\triangle$) ;
   (b) $A \triangle B = A \triangle C \Leftrightarrow B = C$ ;
   (c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\triangle$).
3. Pour quelles parties $A$, $B$, $C$ de $E$ a-t-on la relation $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ ?

[1] C'est à dire : $A \cap B = \varnothing$.