PCSI - exercices de mathématiques

Vocabulaire ensembliste

1 Ensembles

Exercice 1

Soient A et B deux ensembles.

1. Déterminer $A \setminus \varnothing$, $\varnothing \setminus A$, $A \setminus A$.
2. Démontrer que les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont *disjoints* (càd, d'intersection vide).
3. Que vaut $A \setminus B$ si A et B sont disjoints ?

Exercice 2

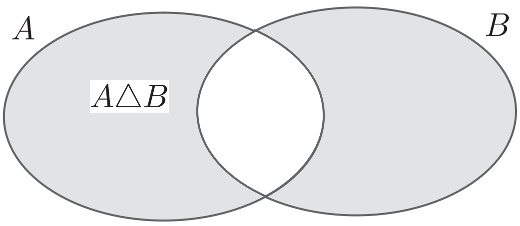
Soit E un ensemble. Si A est une partie de E on pose : $\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

1. Déterminer $\complement_E \varnothing$ et $\complement_E E$.
2. Soit A une partie de E. Démontrer que : $\complement_E(\complement_E A) = A$.
3. Soient A et B des parties de E. Démontrer que : $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ et $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.
4. Démontrer que si A et B sont des parties de E on a l'implication :

$$[(A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } ((\complement_E A \cap \complement_E C) \subset (\complement_E A \cap \complement_E B))] \Rightarrow (B \subset C).$$

Exercice 3 *(différence symétrique)*

Si A et B sont deux ensembles, la *différence symétrique* de A et B est : $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:



1. Dresser la table de vérité de "$x \in A \triangle B$" en fonction de "$x \in A$" et "$x \in B$".
2. Démontrer que si A et B sont des ensembles, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et que $A \triangle B = B \triangle A$.
3. Démontrer que si A et B sont des ensembles, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, et : $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
4. Soit A un ensemble. Déterminer $A \triangle \varnothing$ et $A \triangle A$.
5. Soient A et B des ensembles. Que vaut $A \triangle B$
   (a) quand $A \subset B$?
   (b) quand A et B sont disjoints ?

Exercice 4

Soient A et B des ensembles.

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. L'énoncé $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est-il vrai quels que soient A et B ?

Exercice 5

Soient A et B des ensembles.

1. Déterminer $A \times \varnothing$ et $\varnothing \times B$.
2. Démontrer que $A \times B = \varnothing \Rightarrow (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

Exercice 6

Soient A, A', B, B' des ensembles.

1. Démontrer que si A, A', B, B' sont tous non vides on a : $A \times B = A' \times B' \Rightarrow (A = A' \text{ et } B = B')$.
2. Démontrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) $A \times B = A' \times B'$ et
   (b) $(A = A' \text{ et } B = B')$ ou $[(A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing) \text{ et } (A' = \varnothing \text{ ou } B' = \varnothing)]$.

Exercice 7

E et F sont des ensembles ; A est une partie de E ; B est une partie de F.

1. A l'aide d'un exemple, démontrer qu'on n'a pas, en général : $(E \times F) \setminus (A \times B) = (E \setminus A) \times (F \setminus B)$.
2. Faire un dessin représentant $(E \times F) \setminus (A \times B)$ lorsque $E = F = \mathbb{R}$ et $A = [1, 3]$, $B = [1, 2]$.
3. Donner une expression "simple" de $(E \times F) \setminus (A \times B)$ toujours valable.

2 Applications

Exercice 8

E, F, G sont des ensembles, f est une application de E dans F, g est une application de F dans G.

1. Démontrer que :

   (a) si $g \circ f$ est injective, f est injective.

   (b) si $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

2. Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et où g *n'est pas* injective.

3. Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et où f *n'est pas* surjective.

Exercice 9

E, F, G sont des ensembles, f est une application de E dans F, g est une application de F dans G, h est une application de G dans E.

Démontrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont injectives (*resp.* surjectives) et la troisième surjective (*resp.* injective), alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 10

E, F, G sont des ensembles, f est une application de E dans F, g est une application de E dans G. On considère l'application h de E dans $F \times G$ définie par $h(x) = (f(x), g(x))$ pour tout $x \in E$.

1. Démontrer que si f ou g est injective, h est injective.

2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective ?

Exercice 11 *(images directes)*

$f : E \to F$ est une application et $A \subset E$. On rappelle la définition de l'*image (directe) de A par f* :

$$f\langle A\rangle = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

(ensemble des images par f des éléments de A).

1. Si $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f\langle[0, 2]\rangle$; $f\langle[-2, 2]\rangle$.

2. $f\langle E\rangle$ est aussi appelé parfois *image de f* et noté $\operatorname{Im}(f)$. Que signifie la condition $\operatorname{Im}(f) = F$?

3. Démontrer que si $A \subset A' \subset E$, $f\langle A\rangle \subset f\langle A'\rangle$.

4. Si A, $A' \subset E$ démontrer que :

   (a) $f\langle A \cup A'\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle A'\rangle$;

   (b) $f\langle A \cap A'\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$.

   [Pour certaines inclusions, on pourra utiliser le 3.]

5. Prouver à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité $f\langle A \cap A'\rangle = f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$ est fausse en général.

6. A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on $f\langle A \cap A'\rangle = f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$ *quelles que soient* les parties A et A' de E ?

Exercice 12 *(images réciproques)*

$f : E \to F$ est une application et $B \subset F$. On rappelle la définition de l'*image réciproque de B par f* :

$$f^{-1}\langle B\rangle = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

(ensemble des antécédents par f des éléments de B[1]).

1. Si $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}\langle[0, 4]\rangle$; $f^{-1}\langle[-4, 4]\rangle$; $f^{-1}\langle[1, 4]\rangle$.

2. Que vaut $f^{-1}\langle F\rangle$?

3. Démontrer que si $B \subset B' \subset F$, $f^{-1}\langle B\rangle \subset f^{-1}\langle B'\rangle$.

4. Si B, $B' \subset F$ démontrer que :

   (a) $f^{-1}\langle B \cup B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cup f^{-1}\langle B'\rangle$;

   (b) $f^{-1}\langle B \cap B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cap f^{-1}\langle B'\rangle$.

   [On pourra utiliser le 3.]

Exercice 13

f est une application de E dans F. On conserve les notations des deux exercices précédents.

1. A est une partie de E.

   (a) Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité $A = f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$ n'est pas toujours vraie. Quelle relation (d'inclusion) existe-t-il en général entre A et $f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$?

   (b) A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on $A = f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$ *pour toute* partie A de E ?

2. B est une partie de F.

   (a) Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité $B = f\langle f^{-1}\langle B\rangle\rangle$ n'est pas toujours vraie. Quelle relation existe-t-il en général entre B et $f\langle f^{-1}\langle B\rangle\rangle$?

   (b) A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on $B = f\langle f^{-1}\langle B\rangle\rangle$ *pour toute* partie B de F ?

Exercice 14

E est un ensemble ; $A \subset E$. On définit les applications $f, g : \mathcal{P}(E) \longmapsto \mathcal{P}(E)$ par :

$$f(X) = A \cap X,\ g(X) = A \cup X$$

pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Déterminer $f\langle\mathcal{P}(E)\rangle$, $g\langle\mathcal{P}(E)\rangle$ et pour $Y \in \mathcal{P}(E)$; $f^{-1}\langle\{Y\}\rangle$, $g^{-1}\langle\{Y\}\rangle$.

2. f et g peuvent-elles être injectives (*resp.* surjectives, bijectives) ?

[1] On fera particulièrement attention à cette notation "$f^{-1}\langle B\rangle$" qui *ne* signifie *pas* que f est bijective.

Exercice 15

Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F. Démontrer qu'il y a équivalence entre :

(a) f est injective et

(b) Quel que soit l'ensemble X et quel que soit le couple (Φ, Ψ) d'applications de X dans E, $f \circ \Phi = f \circ \Psi \Rightarrow \Phi = \Psi$.

[*Indication* : Pour (b) $\Rightarrow$ (a) on fera attention que (b) *ne contient pas* les lettres X, Φ, Ψ puisque c'est l'énoncé $\forall X, \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{F}(X, E)$, $f \circ \Phi = f \circ \Psi \Rightarrow \Phi = \Psi$.

$\rightarrow$ On suppose (b) et on veut montrer que f est injective. Cela commence donc par : " $\square$ *Soient* $a, b \in E$ *tels que* $f(a) = f(b)$... ". On cherche alors à *fabriquer* un ensemble X et des applications Φ et Ψ de X dans E vérifiant $f \circ \Phi = f \circ \Psi$ et tels que la conclusion, à savoir $\Phi = \Psi$, donne $a = b$].

Exercice 16 *(théorème de* CANTOR*)*

E est un ensemble.

Démontrer qu'il n'existe pas d'application *surjective* de E sur $\mathcal{P}(E)$.

[*Indication* : On raisonnera par l'absurde en supposant l'existence d'une telle surjection φ. Alors pour tout $x \in E$, $\varphi(x)$ est une partie de E, donc on peut se demander si $x \in \varphi(x)$ ou non. On formera alors la partie

$$A = \{x \in E \,|\, x \notin \varphi(x)\}$$

et on utilisera (puisque φ est surjective) un antécédent a de A par φ pour faire apparaître une contradiction.]

Exercice 17

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{1}{p} < a$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$A_n = \left[0, 1 - \tfrac{1}{n}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 - \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$B_n = \left]-\tfrac{1}{n}, 1\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\tfrac{1}{n} < x < 1\right\}.$$

Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

3 Lois de composition

Exercice 18

E est un ensemble muni d 'une l.c.i. γ ; x et y sont deux éléments de E.

1. Démontrer que si x et y commutent, il en est de même de x^n et y pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que x^n et y^p commutent pour tous n, $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que si E admet un élément neutre, si x est inversible et commute avec y, alors x^{-1} commute avec y. En déduire que si x et y sont tous deux inversibles, alors toute puissance de x (positive ou négative) commute avec toute puissance de y.

Exercice 19

Soit (E, γ) un ensemble structuré (càd. muni d'une l.c.i. γ) tel que

(a) γ est associative ;

(b) Tout élément de E est régulier pour γ.

1. On considère les "translations à droite et à gauche" par $a \in E$:
$\delta_a : E \to E$; $x \mapsto \delta_a(x) = x\,\gamma\,a$ et
$\gamma_a : E \to E$; $x \mapsto \gamma_a(x) = a\,\gamma\,x$.
Démontrer que δ_a et γ_a sont *injectives.*
2. On suppose qu'il existe un couple (u, v) d'éléments de E tel que : $v\,\gamma\,u = v$.

   (a) Démontrer que $u\,\gamma\,v = v$.

   (b) Démontrer que u est élément neutre de (E, γ).

Exercice 20

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\cdot$ associative et telle que :

$$\exists a \in E, \forall y \in E, \exists x \in E, y = a \cdot x \cdot a.$$

Démontrer qu'il existe dans E un élément neutre pour cette loi.

Exercice 21

E est un ensemble muni de deux l.c.i. $\bullet$ et $\star$ admettant des neutres respectifs e et f. On suppose de plus que pour tous x, y, u, $v \in E$:

$$(x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$$

1. Démontrer que $e = f$.
2. Démontrer : $\forall x \in E, \forall y \in E, x \star y = x \bullet y$.
3. Démontrer que la loi $\star$ (qui est donc la même que $\bullet$) est commutative et associative.

Exercice 22

On considère la l.c.i. $\top$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \top y = x + y + \sin xy.$$

1. Démontrer que la loi $\top$ est commutative et qu'il existe un élément neutre pour $\top$.
2. Démontrer qu'il existe des éléments ayant plusieurs symétriques pour $\top$ (On ne demande pas d'*expliciter* les symétriques multiples en question).

   Que peut-on en déduire pour la loi $\top$?

4 Relations d'ordre

Exercice 23

E est un ensemble non vide. On pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$. On munit $\mathcal{A}$ de la relation d'ordre "$\subset$" (inclusion).

1. Déterminer le plus grand élément de $\mathcal{A}$ modulo $\subset$.
2. Dans quel cas $\mathcal{A}$ admet-il un plus petit élément modulo la relation $\subset$?
3. Refaire 1. et 2. en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$, "plus petit" par "plus grand" et inversement.

Exercice 24

On munit $E = \mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$p\,\mathcal{R}\,q \Leftrightarrow \exists n \in E,\ q = p^n.$$

(autrement dit, $p\,\mathcal{R}\,q$ *ssi* q est une puissance de p.)

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. S'agit-il d'un ordre total ou partiel ?
2. E admet-il un plus grand (*resp.* petit) élément (mod $\mathcal{R}$) ?
3. La partie $A = \{2, 4\}$ est-elle majorée (*resp.* minorée) (mod $\mathcal{R}$) ?
4. Même question avec $B = \{2, 5\}$.

Exercice 25

E et F sont deux ensembles ordonnés et f est une application de E dans F.

1. Démontrer que si f est monotone (p. ex. croissante) et injective, f est strictement monotone.
2. Démontrer que si f est strictement monotone et si la relation d'ordre de E est totale, f est injective.
3. Proposer un contre-exemple montrant que l'implication précédente devient fausse si l'ordre sur E n'est pas supposé total.
4. Si f est bijective et strictement monotone, f^{-1} est-elle nécessairement strictement monotone ?

Exercice 26 *(ordre produit)*

$(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ sont deux ensembles ordonnés. On définit sur $E \times F$ la relation $\mathcal{P}$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{P}\,(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' (\mathrm{mod}\,\mathcal{R}) \text{ et } y \leq y' (\mathrm{mod}\,\mathcal{S})).$$

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est une relation d'ordre sur $E \times F$ (l'*ordre produit*).
2. Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, représenter graphiquement les majorants et les minorants d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. On suppose que E et F sont totalement ordonnés et admettent tous deux au moins deux éléments distincts. L'ordre produit $\mathcal{P}$ sur $E \times F$ est-il un ordre total ?
4. On revient au cas où $E = F = \mathbb{R}$. Pour chaque partie A suivante : représenter graphiquement A, déterminer si A est majorée et si A admet un plus grand élément modulo $\mathcal{P}$ (et préciser alors lequel).

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$;

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$;

   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Exercice 27 *(ordre lexicographique)*

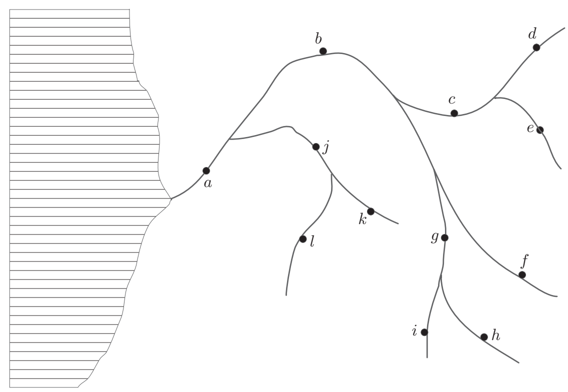
$(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ sont deux ensembles ordonnés. On définit sur $E \times F$ la relation $\mathcal{L}$ par :

$$(x,\ y)\,\mathcal{L}\,(x',\ y') \Leftrightarrow$$
$$(x < x' (\mathrm{mod}\,\mathcal{R}) \text{ ou } [x = x' \text{ et } y \leq y' (\mathrm{mod}\,\mathcal{S})]).$$

1. Démontrer que $\mathcal{L}$ est une relation d'ordre sur $E \times F$. $\mathcal{L}$ est dit *ordre lexicographique* sur $E \times F$. Pourquoi ?
2. Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, représenter graphiquement les majorants et les minorants d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Démontrer que, si $\mathcal{R}$ est un ordre total sur E et si $\mathcal{S}$ est un ordre total sur F, $\mathcal{L}$ est un ordre total sur $E \times F$.
4. Reprendre la question 4. de l'exercice précédent en remplaçant la relation $\mathcal{P}$ par $\mathcal{L}$.

Exercice 28

Sur l'ensemble $E = \{a,\ ...,\ l\}$ des villes on définit la relation $\mathcal{R}$ "est en aval[2] de".
Par exemple : $b\ \mathcal{R}\ e$, $g\ \mathcal{R}\ g$, $j\ \mathcal{R}\ k$, ...



1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. Est-elle totale ou partielle ?
2. E admet-il un plus grand (*resp.* plus petit) élément modulo $\mathcal{R}$? On justifiera soigneusement la réponse.

[2] au sens large (une ville est en aval d'elle-même).