

PCSI - exercices de mathématiques

Systèmes linéaires

Le corps \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice 1

Résoudre :

$$1. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - 5z = 1 \\ 8x - 9y + 13z = 2 \end{cases} ;$$

$$3. \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} ;$$

$$4. \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases} ;$$

$$5. \begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21 \\ 3x + 3y + 2z + t = 10 \\ 4x + 2y + 3z + t = 8 \\ 3x + 5y + z + t = 15 \end{cases} ;$$

$$6. \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 3 \\ x + 4y + 5z + t = 2 \\ 2x + 9y + 8z + 3t = 7 \\ 3x + 7y + 7z + 2t = 12 \\ 5x + 7y + 9z + 2t = 20 \end{cases} ;$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = a \\ 2x + 3y + 4z + t = b \\ 3x + 4y + z + 2t = c \\ 4x + y + 2z + 3t = d \end{cases}$$

(discuter suivant les valeurs de a, b, c, d).

Exercice 2

Discuter et résoudre suivant les valeurs des paramètres les systèmes :

$$1. \begin{cases} x + m y + z = 1 \\ m x + y + (m - 1) z = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$(m \in \mathbb{R} ; x, y, z \in \mathbb{R}) ;$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ a x + b y + c z = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2 \end{cases} ;$$

$$3. \begin{cases} y + m z = a \\ z + m x = b \\ x + m y = c \end{cases}$$

$(m \in \mathbb{R} ; x, y, z \in \mathbb{R}) ;$

$$4. \begin{cases} x + m(y + z) = a \\ y + m(z + x) = b \\ z + m(x + y) = c \end{cases}$$

Exercice 3

Donner une base du sev de \mathbb{K}^n , espace des solutions du système homogène :

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad (n = 3) ;$$

$$2. \begin{cases} x + y - z - t + u = 0 \\ 2x + y - 4t + 4u = 0 \\ x + 2y - 3z + t - u = 0 \end{cases} \quad (n = 5).$$

Exercice 4

Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R} ; \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Discuter et résoudre :

$$1. \begin{cases} \cos 2\alpha x + \cos \alpha y + z = a \\ \cos 2\beta x + \cos \beta y + z = b \\ \cos 2\gamma x + \cos \gamma y + z = c \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} x + \cos \gamma y + \cos \beta z = a \\ \cos \gamma x + y + \cos \alpha z = b \\ \cos \beta x + \cos \gamma y + z = c \end{cases} .$$

Exercice 5

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Discuter et résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases} .$$