PCSI - exercices de mathématiques

Nombres réels - suites de réels

1 Nombres réels

Exercice 1

Démontrer que $\sqrt{2}$ est *irrationnel* (càd : n'est pas le quotient de deux entiers).
[*Indication* : on raisonnera par l'absurde et on se ramènera à une relation dans $\mathbb{N}$.]

Comment pourrait-on généraliser ce résultat ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$; $x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ x+1 \text{ si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $-A \overset{\text{déf.}}{=} \{-x \,|\, x \in A\}$ est minorée et que : $\inf(-A) = -\sup(A)$.

2. Démontrer que $A + B \overset{\text{déf.}}{=} \{x + y \,|\, x \in A,\, y \in B\}$ est majorée et que : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que $\lambda\, A \overset{\text{déf.}}{=} \{\lambda\, x \,|\, x \in A\}$ est majorée et que : $\sup(\lambda\, A) = \lambda \sup(A)$. Que devient ce résultat si $\lambda \in \mathbb{R}_-$?

Exercice 4

1. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

2. Lorsque n est impair, démontrer que $x \mapsto x^n$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}$ et $0 < x < y$, $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Exercice 5

On pose $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x,\, y \in \mathbb{Q}\}$.

1. Démontrer que, si $x,\, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, il en est de même de leur somme, de leur produit et de leurs opposés.

2. Démontrer de plus que si $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Exercice 6

On considère la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$.

1. Démontrer que A est *non vide* et *majorée* dans $\mathbb{Q}$.

2. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r^2 < 2$ (*resp.* $r^2 > 2$).
   Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ (*resp.* $\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$).

3. En déduire que A n'admet *pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}$?

Exercice 7

Soit f une fonction *croissante* de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

On se propose de démontrer que f admet un *point fixe* (càd un réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$). Pour cela on définit l'ensemble $A = \{x \in [0, 1] \,|\, f(x) \geq x\}$.

1. Justifier que $A \neq \varnothing$ et en déduire que A admet une borne supérieure $x_0 \in [0, 1]$.

2. Démontrer que $f(x_0) = x_0$.

[*Indication* : on raisonnera deux fois par l'absurde en supposant $f(x_0) < x_0$ puis $f(x_0) > x_0$ et en trouvant chaque fois une contradiction.]

2 Suites de réels

2.1 Notion de limite

Exercice 8

Soit (u_n) une suite de réels périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ (càd : $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Démontrer que si (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$, elle est constante.

Exercice 9

Soit (x_n) une suite de réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, x_n \in \mathbb{Z}.$$

Démontrer que si (x_n) est convergente et si $a = \lim(x_n)$, $a \in \mathbb{Z}$ et (x_n) est stationnaire en a.

Exercice 10 *suites récurrentes - cf. TD*

Etudier la suite (u_n) définie par les conditions suivantes :

(a) $u_0 > -\frac{3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$;

(b) $u_0 \leq 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$;

(c) $u_0 > -1$, $u_{n+1} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$;

(d) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$ (plus délicate).

2.2 Opérations sur les suites CV

Exercice 11

On pose $x_n = \sin n$ et $y_n = \cos n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les suites (x_n) et (y_n) sont donc deux suites bornées dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que (x_n) est convergente. Démontrer que (y_n) est convergente.
2. On suppose que (y_n) est convergente. Démontrer que (x_n) est convergente.
3. On suppose (x_n) (ou (y_n)) convergente. On peut donc poser $a = \lim(x_n)$ et $b = \lim(y_n)$. A l'aide de relations entre a et b, trouver une contradiction. Ainsi les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ ne sont pas convergentes.

Exercice 12

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes de réels.
On pose $a = \lim(a_n)$ et $b = \lim(b_n)$.
Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}.$$

Exercice 13 *(th. de Cesaro)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels indexée par $\mathbb{N}^*$. On lui associe la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *On suppose que* $\lim(u_n) = 0$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Démontrer que pour $n \geq N$, $|v_n| < \frac{|u_1|+...+|u_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier N' tel que $n \geq N' \Rightarrow |v_n| < \varepsilon$ et conclure que (v_n) converge vers 0.
2. *On suppose que* $\lim(u_n) = a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - a$ et $v'_n = \frac{1}{n}(u'_1 + ... + u'_n)$.
   (a) Exprimer v'_n en fonction de v_n.
   (b) En déduire que (v_n) converge vers a.
3. *On suppose que* $\lim(u_n) = +\infty$.
   (a) Soir $A \in \mathbb{R}$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n > A+1$. Démontrer que pour tout $n \geq N$, $v_n > \frac{u_1+...+u_{N-1}}{n} + \frac{n-N+1}{n}(A+1)$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N' \Rightarrow v_n > A$ et conclure.
   (c) Que dire du cas où $\lim(u_n) = -\infty$?

Exercice 14

Cet exercice utilise le résultat de l'ex. 13.
Soit (u_n) une suite de réels.
On suppose que : $\lim(u_{n+1} - u_n) = a \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $\lim(\frac{u_n}{n}) = a$.

2.3 Suites CV et ordre

Exercice 15

1. On définit la suite (a_n) par $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer que (a_n) est croissante et convergente dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite.
   [*Indication* : écrire astucieusement $\frac{1}{x(x+1)}$ si x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.]
2. On définit la suite (u_n) pour $n \geq 1$ par :
   $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.
   Démontrer que (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ (définie pour $n \geq 1$).
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 0$. On définit la suite (u_n) par $u_1 = \sqrt{a_1}$, $u_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}$, $u_3 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}}$ et de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{... + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}}$$

(Pour construire u_n on part de $\sqrt{a_n}$, on ajoute a_{n-1} et on prend la racine carrée, on ajoute a_{n-2} et on prend la racine carrée etc.)

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On suppose que (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \alpha^{2^n}$.
3. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \alpha^{2^n}$.
   Soit $h > 0$ et soit (v_n) la suite définie par
   $$v_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{... + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n + b_n}}}}}$$
   où $b_n = h\alpha^{2^n}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.
   (b) Démontrer qu'il existe un réel $h > 0$ tel que (v_n) soit décroissante.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la suite (u_n) définie par :
   $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}$ (pour $n \geq 1$) est convergente dans $\mathbb{R}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. On définit la suite (u_n) par $u_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + ... \sqrt{a + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ fois le réel “}a\text{”}}$. Démontrer que (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ et, en utilisant une relation entre u_{n+1} et u_n, déterminer $\ell = \lim(u_n)$.

Exercice 17 *(moyenne arithmético-géométrique)*

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que les conditions :
$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = \alpha,\ b_0 = \beta \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{array}\right.$$
définissent des suites (a_n) et (b_n) à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que, *à partir du rang* 1, $b_n \leq a_n$, (b_n) est croissante et (a_n) est décroissante.
3. Démontrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes dans $\mathbb{R}$ et ont même limite.

Exercice 18 *(moyenne arithmético-harmonique)*

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que les conditions :
$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = \alpha,\ b_0 = \beta \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \end{array}\right.$$
définissent des suites (a_n) et (b_n) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que, *à partir du rang* 1, $b_n \leq a_n$, (b_n) est croissante et (a_n) est décroissante.
3. Démontrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes dans $\mathbb{R}$ et ont même limite. Préciser la valeur de cette limite commune en fonction de α et β.

Exercice 19

Soit (u_n) une suite *monotone* de réels.
Démontrer que la suite (v_n) définie par :
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$
est convergente *si et seulement si* (u_n) est convergente.
(*cf.* ex.13.)

Exercice 20 *(approximations décimales d'un réel)*

Soit x un nombre réel.
On rappelle que, si $n \in \mathbb{N}$, les valeurs décimales approchées à 10^{-n} près par défaut (*resp.* par excès) de x sont les nombres décimaux définis par
$$\left\{\begin{array}{l} u_n(x) = \frac{a_n(x)}{10^n} \\ v_n(x) = \frac{1+a_n(x)}{10^n} \end{array}\right.$$
où $a_n(x) = E(10^n x)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \leq x < v_n(x)$ et $v_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{10^n}$

1. Démontrer que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont *adjacentes.*
2. En déduire que : *$(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ admettent pour limite x dans $\mathbb{R}$.*

Ainsi : *tout réel est la limite d'une suite croissante (resp. décroissante) de nombres décimaux.* Ceci qui constitue une autre façon d'énoncer la propriété : *l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.*

2.4 Sous-suites

Exercice 21

Soit (u_n) une suite de réels.
On suppose que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 22

Soit (u_n) la suite de réels définie par
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Etudier les sous-suites (x_n) et (y_n) de (u_n) définies par $x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{2n+1}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de sa limite.

3 Equivalents

Exercice 23

Classer les suites ci-après par ordre croissant pour la relation "o" (est négligeable devant) : $(\sqrt{n})^n$; 2^{n^2} ; $(2n)^n$; n^{2^n} ; $(2n)!$; $n^{\sqrt{n}}$; n^{2n} ; n^n ; $n!$; $(n+2)!$.

Exercice 24

En utilisant des équivalents, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$;
2. $u_n = \sqrt[2n+1]{1 + a^{2n+1}}$ (selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$) ;
3. $u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$;
4. $u_n = \left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n$;
5. $u_n = n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}$.

Exercice 25

Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après, ainsi que leur limite si elle existe.

1. $u_n = E(\sqrt{n})$; 2. $u_n = \binom{n}{k}$ (k étant fixé) ;
3. $u_n = \sum_{k=0}^{n} k$; 4. $u_n = (n+1)^p - (n-1)^p$ (p fixé) ;
5. $u_n = (n+1)^p - n^{p-1}(p+n)$; 6. $u_n = \sqrt{2n^2+n} - n$;
7. $u_n = \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2}n$; 8. $u_n = \sqrt[3]{n^3+3n} - n$;
9. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$; 10. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$;
11. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n}$; 12. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^4}$;
13. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^4}$; 14. $u_n = 2^n + (-2)^n + (1,5)^n$;
15. $u_n = 2^{n+1} - 2^n$; 16. $u_n = 2^{n^2+n} - 2^{n^2}$;
17. $u_n = e^{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$; 18. $u_n = (\sqrt{n})^n + n^{\sqrt{n}} + n^{\frac{n}{2}}$;
19. $u_n = (2n)! - n^n$; 20. $u_n = (2^n)^n + 2^{n^2} + (4^n)^2$;
21. $u_n = (n+1)^n$; 22. $u_n = (n-1)^n$;
23. $u_n = (n+1)^n - n^n$; 24. $u_n = (n+1)^n - en^n$;
25. $u_n = (2n)! - n^{2n}$.