PCSI - exercices de mathématiques

Structures algébriques usuelles

1 Groupes

Exercice 1 *(axiomes faibles de groupe)*

Soit G un ensemble muni d'une loi $\cdot$ telle que:

(a) $\cdot$ est associative ;

(b) $\exists e \in G,\ \forall x \in G,\ x \cdot e = x$;

(c) $\forall x \in G,\ \exists x' \in G,\ x \cdot x' = e$.

Démontrer qu'alors $(G, \cdot)$ est un groupe.

[*Indication* : Prenant un élément x dans G, on en déduit un élément x' vérifiant (c). Appliquant de nouveau (c) à x' , on en déduit x''. On calculera alors de deux façons $x' \cdot x \cdot x' \cdot x''$ pour obtenir $x' \cdot x = e$. On calculera ensuite $x \cdot x' \cdot x$ pour obtenir $e \cdot x = x$.]

Exercice 2

$(G, \times)$ est un groupe tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Démontrer que $(G, \times)$ est abélien.

Exercice 3 *(groupes de cardinal 2,3,4.)*

1. Soit $G = \{e, a\}$. Démontrer qu'il existe sur G une seule loi de groupe dont e soit l'élément neutre.
2. Même question avec $G = \{e, a, b\}$.
3. Quelles sont les lois de groupe sur $G = \{e, a, b, c\}$ telles que e soit l'élément neutre ? Sont-elles commutatives ?

Exercice 4

Démontrer que si $\mathrm{card}(E) \geq 3$, $(\mathrm{Bij}(E, E), \circ)$ n'est pas commutatif. Qu'en est-il des cas où $\mathrm{card}(E) = 1$ et $\mathrm{card}(E) = 2$?

Exercice 5

Soit $(G, \times)$ un groupe. Le *centre* de G est

$$Z\,(G) = \{x \in G \,|\, \forall y \in G,\ xy = yx\}$$

Démontrer que $Z\,(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6

Si $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ on note $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto az + b$ et on pose $\mathcal{G} = \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$.

1. Démontrer que si $g \in \mathcal{G}$ il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ *et un seul* tel que $g = f_{a,b}$; on pose alors: $p(g) = a$ et $q(g) = b$. On construit ainsi deux applications $p : \mathcal{G} \to \mathbb{C}^*$ et $q : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$.
2. Soit $g = f_{a,b}$ un élément de $\mathcal{G}$. Démontrer que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ $(= \mathrm{Bij}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$ et déterminer $p(g^{-1})$ et $q(g^{-1})$.
3. Démontrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$.
4. Si (a, b) et (a', b') sont dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, à quelle condition a-t-on $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{a',b'} \circ f_{a,b}$?
5. Déterminer le *centre* (*cf.* Ex. 5) du groupe $(\mathcal{G}, \circ)$.
6. On pose $\mathcal{T} = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{C}\}$. Démontrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G}, \circ)$. Démontrer que q est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{C}$.
7. Démontrer que p (voir 1.) est un morphisme de groupes de $(\mathcal{G}, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ et déterminer $\ker(p)$.

Exercice 7

Soit $(G, \times)$ un groupe et soient H, K des sous-groupes de G tels que : $H \cap K = \{e\}$.

Démontrer que l'*application* $f : H \times K \to G$; $(x, y) \mapsto xy$ est injective, et en déduire que $\mathrm{card}(HK) = \mathrm{card}(H) \cdot \mathrm{card}(K)$.

Exercice 8 *(réunion de sous-groupes)*

1. On munit $\mathbb{Z}^2$ de sa structure de groupe produit : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. On pose $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$ et $K = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Démontrer que H et K sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}^2, +)$. $H \cup K$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$?
2. Soit $(G, \times)$ un groupe et soient H et K des sous-groupes de $(G, \times)$. Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, \times)$ *si et seulement si* $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 9 *(automorphismes intérieurs)*

Soient $(G, \times)$ un groupe et $a \in G$. On définit $\sigma_a : G \to G$; $x \mapsto axa^{-1}$.

1. Démontrer que σ_a est un automorphisme de G.
2. Que vaut σ_{1_G} ? Calculer $\sigma_a \circ \sigma_b$ pour a, $b \in G$.
3. En déduire que $\sigma_a \in \mathrm{Aut}\,(G)$ (ensemble des automorphismes de G).
4. Que peut-on dire de $G \to \mathrm{Aut}\,(G)$; $a \mapsto \sigma_a$?

2 Anneaux

Exercice 10

Soit A un anneau non nul et sans diviseur de zéro. Démontrer que si A est fini, A est un corps.

Exercice 11

A est un anneau commutatif et d est un élément de A. On pose $A[\sqrt{d}] = (A^2, +, \times)$ où $+$ et $\times$ sont définies par :

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x', y+y') \text{ et}\\ (x,y)\times(x',y') &= (xx'+d\,yy', xy'+yx').\end{aligned}$$

1. Démontrer que $A[\sqrt{d}]$ est un anneau commutatif dont on précisera le zéro et l'élément unité.
2. K est un corps commutatif et d est un élément de K qui *n'est pas un carré* dans K (càd : $\forall x \in K,\ x^2 \neq d$). Démontrer que $F = K\,[\sqrt{d}]$ est un corps commutatif.

Exercice 12

A est un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1. Soit $x \in A$. Démontrer que si x est nilpotent, $1-x$ est inversible. [On rappelle que si a et b commutent, on a $b^p - a^p = (b-a)(\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i})$].
2. Soient x, $y \in A$ tels que $xy = yx$.
   (a) Démontrer que si x est nilpotent, yx est nilpotent.
   (b) Démontrer que si x et y sont nilpotents, $x+y$ est nilpotent.
3. Si f est une application de A dans A on pose : $f^0 = \mathrm{Id}_A,\ f^1 = f,\ f^2 = f\circ f, \ldots,\ f^n = \underbrace{f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ termes}}$ etc.

   Soit $a \in A$ et soit u_a l'application

   $$u_a : \left|\begin{array}{ll} A & \to A \\ x & \mapsto ax - xa.\end{array}\right.$$

   (a) On suppose que $a^2 = 0$. Démontrer que $u_a^3 = 0$ (c'est à dire que pour tout $x \in A$, $u_a^3(x) = 0$, où $u_a^3 = u_a \circ u_a \circ u_a$).
   (b) Démontrer que si a est nilpotent, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_a^q = 0$.
4. Un élément t de A est *unipotent* si $1-t$ est nilpotent. Démontrer que si t et s sont unipotents et si $st = ts$, alors st est unipotent. Démontrer que si t est unipotent, t est inversible dans A et t^{-1} est unipotent.

Exercice 13 *(anneaux de Boole)*

Soit A un anneau tel que $\forall x \in A,\ x^2 = x$.

1. Démontrer que pour tout $x \in A,\ x + x = 0$. [Calculer $(x+x)^2$].
2. Démontrer que A est commutatif. [Calculer $(x+y)^2$].
3. Démontrer que A ne peut pas posséder trois éléments (exactement).
4. Démontrer que si $\mathrm{card}(A) > 2$, A n'est pas intègre. [Calculer $x(x+1_A)$].
5. Démontrer qu'il existe (à isomorphisme près) un seul anneau de Boole à 4 éléments.
6. Démontrer que si un anneau de Boole est fini, son cardinal est une puissance de deux.
7. Vérifier que si E est un ensemble, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.

Exercice 14 *(entiers de Gauss)*

On note $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$ l'ensemble des complexes de parties réelle et imaginaires entières.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$.
3. Peut-on factoriser 2 dans $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$ comme produit de deux éléments non inversibles ? Commentaire ?

3 Corps

Exercice 15

Soit K un sur-corps du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (c'est à dire un corps contenant $\mathbb{Q}$; p.ex. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais voir aussi Ex. 16 et Ex. 17). Soit σ un automorphisme du corps K. Démontrer que σ laisse fixe les éléments de $\mathbb{Q}$: $\forall x \in \mathbb{Q},\ \sigma(x) = x$.

[*Indication* : on montrera successivement que σ laisse fixe les éléments de $\mathbb{N}$ — par exemple par récurrence — puis ceux de $\mathbb{Z}$ et enfin ceux de $\mathbb{Q}$.]

Exercice 16 *(Cet exercice utilise l'exercice 15.)*

1. Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, càd : $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$. [On raisonnera par l'absurde et on pensera aux fractions irréductibles.]
2. On pose $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   (a) Démontrer que si $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ il existe un *unique* couple $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
   (b) Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps commutatif.
3. Démontrer que les seuls automorphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sont $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$ et $\sigma : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. [*Indication* : On étudiera l'image de $\sqrt{2}$.]

Exercice 17 *(Les quaternions d'Hamilton.)*

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ muni des lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x', y+y')\\ (x,y)\times(x',y') &= (xx' - y\bar{y}', xy' + y\bar{x}')\end{aligned}$$

On pourra admettre que $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$.
On pose enfin $I = (1,0)$, $J = (\mathrm{i},0)$, $K = (0,1)$ et $L = (0,\mathrm{i})$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}$ est un anneau. Préciser $1_{\mathbb{H}}$.

2. Démontrer que $G = \{I, J, K, L, -I, -J, -K, -L\}$ muni de la multiplication de $\mathbb{H}$ est un groupe non commutatif et dresser sa table. Quel est son *centre* ?

3. On définit l'application

$$\sigma : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ Q & \mapsto & \sigma(Q) = (\bar{x}, -y) \text{ si } Q = (x, y)\,. \end{array} \right.$$

   (a) Démontrer que σ est un automorphisme du groupe $(\mathbb{H}, +)$. Déterminer l'ensemble des *points fixes* de σ : $\{Q \in \mathbb{H} \,|\, \sigma(Q) = Q\}$.

   (b) Démontrer la relation, pour tous Q, $Q' \in \mathbb{H}$, : $\sigma(QQ') = \sigma(Q')\sigma(Q)$.

4. Démontrer que si $Q \in \mathbb{H}$ on a $Q.\sigma(Q) = \sigma(Q).Q = n(Q).I$ où $n(Q)$ est un réel dont on donnera l'expression en fonction de Q. Démontrer que si $Q, Q' \in \mathbb{H}$, $n(QQ') = n(Q)n(Q')$.

5. Démontrer que $\mathbb{H}$ est un *corps non commutatif*[1]. Quel est son *centre*[2] ?

6. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes à des sous-corps de $\mathbb{H}$. (Ainsi, on peut considérer $\mathbb{H}$ comme un sur-corps de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.)

4 Espaces vectoriels

Exercice 18 *(cf. Ex. 8)*

1. Démontrer que l'intersection de deux sev d'un $\mathbb{K}$ev E est un sev de E. Généralisation ?

2. Soient E_1 et E_2 deux sev du $\mathbb{K}$ev E.

   (a) Montrer (sur un exemple) qu'en général $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sev de E.

   (b) On suppose $E_1 \not\subseteq E_2$ et $E_2 \not\subseteq E_1$. Trouver $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x_1 + x_2 \notin E_1 \cup E_2$.

   (c) En déduire que $E_1 \cup E_2$ est un sev de E *ssi* $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Exercice 19

E et F sont des $\mathbb{K}$ev et f est une application linéaire de E dans F.

On définit $\varphi : E \times F \to E \times F$; $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$.

Démontrer que φ est un *automorphisme* du $\mathbb{K}$ev produit $E \times F$.

Exercice 20

E est un $\mathbb{K}$ev, f et g sont des endomorphismes de E.

1. Démontrer que $\ker(g \circ f) = f^{-1} \langle \ker(g) \rangle$.

2. On suppose que f et g *commutent* (càd : $f \circ g = g \circ f$). Démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g. (On rappelle qu'un sev V de E est *stable* par g si $g \langle V \rangle \subset V$ càd si $\forall x \in V$, $g(x) \in V$.)

Exercice 21

E est un $\mathbb{K}$ev, $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Si $k \in \mathbb{N}$ on pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ (où $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$). Démontrer que (modulo $\subset$) la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 22

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ev et $u \in L_{\mathbb{K}}(F, G)$. On définit $\varphi_u : L_{\mathbb{K}}(E, F) \to L_{\mathbb{K}}(E, G)$; $f \mapsto u \circ f$.

1. Démontrer que φ_u est linéaire.

2. Démontrer que :

   (a) Si $f \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$, $f \in \ker(\varphi_u)$ *si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(u)$;

   (b) Si $g \in L_{\mathbb{K}}(E, G)$ et $g \in \mathrm{Im}(\varphi_u)$, *alors* $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $g \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$ tel que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(u)$.

   (a) On suppose u injective. Démontrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $u(y) = g(x)$. Démontrer que l'application $x \mapsto y$ est linéaire. En déduire que $g \in \mathrm{Im}(\varphi_u)$.

   (b) u est de nouveau quelconque. Soit F' un supplémentaire de $\ker(u)$ dans F et soit $u' = u_{|F'}$. Démontrer que u' est injective et que $\mathrm{Im}(u') = \mathrm{Im}(u)$. En déduire que $g \in \mathrm{Im}(\varphi_u)$.

   (c) Conclure.

4. Démontrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} L_{\mathbb{K}}(F, G) & \to & L_{\mathbb{K}}(L_{\mathbb{K}}(E, F), L_{\mathbb{K}}(E, G)) \\ u & \mapsto & \varphi_u \end{array} \right.$$

   est linéaire injective.

Exercice 23

On munit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de sa structure de $\mathbb{R}$ev.

On note E_0 (*resp.* E_1) l'ensemble des fonctions paires (*resp.* impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, càd vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ (*resp.* $f(-x) = -f(x)$).

Démontrer que E_0 et E_1 sont des sev de E et que $E = E_0 \oplus E_1$.

[*Indication* : si $f \in E$ on explicitera la décomposition $f = f_0 + f_1$ où $f_0 \in E_0$, $f_1 \in E_1$ sont respectivement la partie paire et la partie impaire de f .]

[1] Le corps $\mathbb{H}$ étudié dans cet exercice s'appelle le corps des *quaternions*. Son intérêt est, entre autres, historique : lors de sa découverte en 1843 par le mathématicien irlandais W.R. Hamilton, il fut le premier exemple connu de corps non commutatif — et sans doute le dernier pour vous. Il est très utile en géométrie.

[2] Le *centre* d'un *anneau* A est $C(A) = \{x \in A \mid \forall y \in A, xy = yx\}$, ensemble des éléments de A qui commutent *pour* $\times$ avec tous les autres (l'addition de A étant commutative). Ce n'est donc pas la même définition que dans l'exercice 5.

Exercice 24

E est un $\mathbb{K}$ev. On munit $(L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ de sa structure d'anneau. En particulier si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ etc.

1. Démontrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Démontrer l'équivalence entre :
$$\begin{cases} (1)\ \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\} \\ (2)\ \ker(f) = \ker(f^2). \end{cases}$$
3. Démontrer l'équivalence entre :
$$\begin{cases} (1)\ E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f) \\ (2)\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2). \end{cases}$$
4. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\ker(f) = \ker(f^2)$.
5. Le 4. montre que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$ est vrai en particulier quand f est un projecteur. On munit $E = \mathbb{R}^2$ de sa structure de $\mathbb{R}$ev. Soit
$$f : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha + \beta, \alpha + \beta). \end{array} \right.$$
Démontrer que $f \in L_{\mathbb{R}}(E)$, déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.
Démontrer que f n'est pas un projecteur.
Quelle remarque peut-on faire ?

Exercice 25

E est un $\mathbb{K}$ev.
Démontrer que tout projecteur p de E commute avec tout endomorphisme f de E vérifiant
$$f\langle \mathrm{Im}(p) \rangle \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } f\langle \ker(p) \rangle \subset \ker(p).$$

Exercice 26

Soient E un $\mathbb{K}$ev et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Démontrer que $f^2 = \mathrm{Id}_E$ *ssi* $\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.

Exercice 27

1. Démontrer que l'ensemble $E = CV(\mathbb{R})$ des suites de réels convergentes est un sev du $\mathbb{R}$ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de réels.
2. Démontrer que $CT(\mathbb{R})$ ensemble des suites constantes et $CV0(\mathbb{R}) = \{x = (x_n) \in CV(\mathbb{R}) \mid \lim(x_n) = 0\}$ forment deux sev *supplémentaires* de E.

Exercice 28

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ev et $f \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$.
Démontrer que f est injective (resp. surjective) *ssi* f est inversible à gauche (resp. à droite) *dans* $(L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$. (Comparer avec le résultat correspondant de vocabulaire ensembliste).

Exercice 29

Soient E un $\mathbb{K}$ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p \circ q = p$ *ssi* $\ker q \subset \ker p$.
2. En déduire que $p \circ q = q$ *ssi* $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$.

Exercice 30 *(somme de projecteurs)*

[On pourra éventuellement utiliser l'ex. 25.]
Soient E un $\mathbb{K}$ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p+q$ est un projecteur *ssi* $p \circ q = -q \circ p$.
2. En déduire que $p+q$ est un projecteur *ssi* $p \circ q = q \circ p = 0_{L(E)}$.
3. Démontrer que dans ce cas, $\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ et $\ker\,(p+q) = \ker p \cap \ker q$.
4. Démontrer que si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$, f est un projecteur *ssi* $\mathrm{Id}_E - f$ est un projecteur.
5. Que peut-on dire de trois projecteurs p, q et r de E tels que $p + q + r = \mathrm{Id}_E$?

Exercice 31

Soient E un $\mathbb{C}$ev et $f \in L_{\mathbb{C}}(E)$ tel que : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
On pose $F = \{x \in E \mid f(x) = \mathrm{i}\, x\}$ et
$G = \{x \in E \mid f(x) = -\mathrm{i}\, x\}$.

1. Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Déterminer l'expression de f en fonction des projecteurs p et q associés à la somme directe précédente.