PCSI - exercices de mathématiques

Calculs de primitives

Exercice 1 *Fonctions rationnelles*

Calculer les primitives des fonctions rationnelles $x \mapsto F(x)$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivantes :

1. $F(x) = \frac{1}{4x^2+4x+5}$;
2. $F(x) = \frac{x^3-2}{x^3-x^2}$;
3. $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$;
4. $F(x) = \frac{x^5+2}{x^5-x}$;
5. $F(x) = \frac{x^2-x}{x^4+3x^2+2}$;
6. $F(x) = \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}$;
7. $F(x) = \frac{x^3}{(x^2+x+1)^3}$;
8. $F(x) = \frac{1}{(x^2+2x+5)^3}$;
9. $F(x) = \frac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$ $(\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$;
10. $F(x) = \frac{1}{(x^2-2x\cos\alpha+1)(x^2-2x\cos\beta+1)}$
    $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $\cos\alpha \neq \cos\beta)$;

Exercice 2 *Fonctions rationnelles en* sin, cos, sh *et* ch

Calculer les primitives suivantes (en précisant les intervalles de calcul).

1. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;
2. $\int \frac{\cos x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$;
4. $F_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n} x}$; $G_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n+1} x}$;
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\cos x+b\sin x)^2}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ et $ab \neq 0)$;
7. $\int \frac{\mathrm{ch}(3x)}{1+\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x$;
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^3 x+\mathrm{sh}^3 x}$;
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{th}^3 x}$;
10. $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$;
11. $\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ $(n = 2p$; $n = 2p+1$; $p \in \mathbb{N})$.
12. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;
13. $\int \frac{1}{4-5\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 *Fonctions rationnelles en x et* $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Même exercice.

1. $\int (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\mathrm{d}x$;
2. $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$;
4. $\int \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$;
5. $\int \sqrt[3]{x^3-6x^2}\,\mathrm{d}x$;
6. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}\,\mathrm{d}x$;
7. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$;
8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 *Fonctions rationnelles en x et* $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Même exercice.

1. $\int \frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{-x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x$;
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$.

Exercice 5 *Primitives "non classiques"*

Calculer les primitives suivantes (en précisant les intervalles de calcul). Il sera nécessaire de les transformer (par IPP ou CV) pour se ramener aux primitives classiques.

1. $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$;
2. $\int x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x$;
3. $\int \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,\mathrm{d}x$;
4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\arcsin x\,\mathrm{d}x$;
5. $\int x^2\ln|x|\,\mathrm{d}x$;
6. $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;
7. $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$;

8. $\int \mathrm{e}^x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$;
9. $\int (x^2+1)\cos x \,\mathrm{d}x$;
10. $\int x\cos^3 x \,\mathrm{d}x$;
11. $\int \mathrm{e}^x (x\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$;
12. $\int \frac{1}{x(x^5-1)^3}\,\mathrm{d}x$ [poser $x^5 = u$];
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^n+b)}$;
14. $\int \mathrm{ch}^3 x \,\mathrm{d}x$;
15. $\int \frac{(x^4+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;
16. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$;
17. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$ [Poser $x = \tan t$] ;
18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$ [Poser $x+1 = \tan t$] ;
19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x(x-1)}}$ [Poser $x = \frac{1}{t}$] ;
20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ [Poser $1+x = \frac{1}{u}$] ;
21. $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$ [Poser $\mathrm{e}^x = u$] ;
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^n}$;
23. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ [Poser $u = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}$] ;
24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Exercice 6

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $I_n = \int_1^a (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n et en déduire la valeur de I_n.

Exercice 7

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^\alpha+1)^n}$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$ puis $I_2(x)$ et $I_3(x)$ pour $\alpha = 3$.

Exercice 8

Calculer $\int_0^x t\,\cos t\,\sin t\,\ \mathrm{ch}\ t\,\ \mathrm{sh}\, t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9

Calculer $I(x) = \int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t \ln(\ln t)}$.

Exercice 10

On fixe θ dans $\mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$.

1. Calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t\cos\theta+1}$ (sur $\mathbb{R}$ puisque $t^2 - 2t\cos\theta + 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
2. Déterminer $\arctan\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ suivant les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$. [On se placera sur les différents intervalles $I_k = \ ]k\pi, (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.]
3. Calculer, suivant la valeur de $\theta \in \mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$, l' “intégrale généralisée”
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t\cos\theta+1}$$
$$\Big(\overset{\text{déf.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t\cos\theta+1}\Big).$$

Exercice 11

Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ pour $n \geq 2$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2x}{\ln n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{1}{x\ln n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Démontrer que f_n est continue sur $[0,1]$ et calculer $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Démontrer que si $x \in [0,1]$, $(f_n(x))$ converge vers une limite $f(x)$ où f est une fonction continue sur $[0,1]$.
3. Comparer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Quelle remarque peut-on faire ?