PCSI - exercices de mathématiques

Polynômes

1 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1

Soient n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ et

$$P = (X+1)^{n_1},\ Q = (X+1)^{n_2} \in \mathbb{K}[X].$$

Calculer de deux façons différentes le terme en X^p du produit PQ. Quelle relation obtient-on ?

Exercice 2

Factoriser le polynôme :

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + ... + \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}.$$

[Factoriser P_1, P_2, P_3, ... jusqu'à deviner une relation de récurrence.]

Exercice 3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i X^i = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$

Exercice 4

1. Démontrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes telle que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2X\,P_{n+1} - P_n$.
2. Calculer P_2, P_3, P_4.
3. Démontrer que $P_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire les racines de P_n.

Exercice 5

Déterminer tous les couples (P, Q) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

(a) $P^2 + Q^2 = X$;
(b) $P^2 + Q^2 = X^2$;
(c) $P^3 - Q^3 = X^3 - 1$ et $\deg P = \deg Q = 1$.

2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 6

Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$;
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$;
3. $A = \mathrm{i}X^3 + X^2 - \mathrm{i}X$; $B = X - 1 + \mathrm{i}$;
4. $A = X^4 + \mathrm{i}X^3 + 2X - \mathrm{i}$; $B = (1-\mathrm{i})X^2 + \mathrm{i}X + 1 + \mathrm{i}$.

Exercice 7

Démontrer que le polynôme réel $X^2 - 3X + 2$ divise le polynôme $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.
Quel est le quotient ?

Exercice 8

Démontrer que le polynôme réel $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise le polynôme $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n \cos n\theta - X\cos\theta + 1$.
Quel est le quotient ?

Exercice 9

Pour quelles valeurs de l'entier $n \in \mathbb{N}$ le polynôme réel $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 10

On donne le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - 1$ (*resp.* $X - 2$, $X - 3$) soit 4 (*resp.* 9, 16).
Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$?

Exercice 11 *(Méthode de Horner)*

Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$.

1. Déterminer un polynôme de degré deux de $\mathbb{Z}[X]$ ayant pour racine $2 + \sqrt{3}$.
2. Calculer $P(2 + \sqrt{3})$.

Exercice 12

Démontrer que $X^8 + 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.
Le décomposer en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ (sans faire intervenir la fonction cos).

Exercice 13

1. Factoriser $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14

Déterminer les polynômes $(X-a)(X-b)$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que P divise $P(X^3)$.

Exercice 15

Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme réel $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 16

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a,\, b \in \mathbb{K}$.

1. On suppose $a \neq b$. Calculer en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Généralisation ?

2. On suppose $a = b$. Calculer en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

3 Racines d'un polynôme

Exercice 17

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$$

sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 18

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$$

sachant qu'il n'admet *que* des racines multiples.

Exercice 19

Etudier l'ordre de multiplicité des racines du polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Exercice 20

1. Factoriser $X^6 - \mathrm{i}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 21

Déterminer l'entier n pour que le polynôme :

$$(X+1)^n - X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$$

admette au moins une racine multiple.

Exercice 22

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle :

1. $P = X^3 - (3+2\mathrm{i})X^2 + (3+11\mathrm{i})X - 2(1+7\mathrm{i})$;

2. $P = 2X^3 - (5+6\mathrm{i})X^2 + 9\mathrm{i}X - 3\mathrm{i} + 1$.

Exercice 23

Factoriser les polynômes réels suivants sachant qu'ils ont une racine commune :
$P = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$; $Q = X^3 - 7X^2 + 7X - 15$.

Exercice 24

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.
Démontrer que si a est racine multiple de P'' et si P'' divise P, alors a est racine multiple de P et son ordre de multiplicité est au moins 4.

Exercice 25

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 26

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$ et :

$$P\left(X^2\right) = P(X)\ P(X-1). \tag{1}$$

1. Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$. Démontrer que z^2 et $(1+z)^2$ sont racines de P.

2. En déduire que les racines de P sont de module 1. [Raisonner par l'absurde.]

3. Soit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ une racine de P. Déterminer à l'aide de (1) les valeurs possibles de θ. En déduire que P ne peut avoir pour racines que deux complexes z_1 et z_2 que l'on précisera.

4. Comparer à l'aide de (1) les multiplicités respectives de z_1 et z_2 comme racines de P . En déduire la forme générale du polynôme P.

Exercice 27

1. Soit $P = -X^3 + X^2 + \lambda X - 6 \in \mathbb{C}[X]$ et soient $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{C}$ ses racines.

   Déterminer λ pour que $x_1 x_2 = x_1 + x_2$.

2. Même question avec $P = 2X^3 - X^2 - 7X + \lambda$ et $x_1 + x_2 = 1$.

3. Même question avec $P = X^3 - 7X + \lambda$ et $x_2 = 2x_1$.

Exercice 28

Soient a, b, c trois complexes de modules deux à deux distincts. On pose $\alpha_k = a^k + b^k + c^k$ pour $k = 1$, 2 et 3 et on suppose : $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$.
[On introduira le polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines a, b et c et on écrira les relations entre coefficients et racines de P. Il pourra être utile d'additionner les conditions $P(a) = 0$, $P(b) = 0$ et $P(c) = 0$ pour exprimer α_3.]