PCSI - exercices de mathématiques

# Étude métrique des courbes

Dans tous les exercices suivants, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique, et *orienté* si nécessaire.

Le réel $a > 0$ désigne le cas échéant un *paramètre d'homogénéité* (une "unité de longueur").

**Exercice 1**

$\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
$\gamma$ est l'arc géométrique dont un paramétrage est

$$t \mapsto M = F(t) = (x(t), y(t))$$

Déterminer l'abscisse curviligne $s = \sigma(t)$ sur $\gamma$ d'origine $A = F(0)$, le rayon de courbure $R(t)$ de $\gamma$ en $M = F(t)$, la développée $\Gamma$ de $\gamma$.

Construire sur un même dessin les représentations graphiques de $\gamma$ et $\Gamma$.

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3\cos 4t - 4\cos 3t \\ y(t) = 3\sin 4t - 4\sin 3t \end{array}\right. \quad (t \in [-\pi, \pi])$ ; par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de $\gamma$ à $\Gamma$ ? ;
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y(t) = a(3\sin t - \sin 3t) \end{array}\right. \quad$ (*néphroïde*) ; même question ;
3. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = a(2\sin t - \sin 2t) \end{array}\right. \quad$ (*deltoïde*) ; même question ;
4. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{array}\right. \quad$ (*astroïde*) ; même question ;
5. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t \end{array}\right.$ ; quelle remarque peut-on faire ? Calculer les longueurs de $\gamma$ et $\Gamma$.
6. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\arctan t \\ y(t) = \ln\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \end{array}\right.$ [chercher un paramétrage sous la forme $y = f(x)$].

**Exercice 2**

$\mathbb{R}^2$ est orienté. $\gamma$ est l'arc géométrique dont un paramétrage est

$$F : \theta \mapsto M = O + r\,\vec{u}(\theta) \text{ où } r = f(\theta).$$

Déterminer l'abscisse curviligne $s = \sigma(\theta)$ sur chacun des intervalles où $r$ est défini, et sur chacun de ces intervalles, déterminer le rayon de courbure $R(\theta)$ de $\gamma$ en $M = F(\theta)$.

Construire sur un même dessin les représentations graphiques de $\gamma$ et de sa développée $\Gamma$.

1. $r = \frac{a}{1-\theta^2}$ ;
2. $r = a\,\mathrm{th}\,\frac{\theta}{2}$ ; déterminer l'abscisse curviligne $s = \sigma(\theta)$ sur $\gamma$ d'origine $A = F(0)$ ;
3. $r = \frac{a}{\cos^3(\theta/3)}$ ; calculer la longueur et l'aire de la "boucle".

**Exercice 3** *(équations intrinsèques)*

Une *équation intrinsèque* de l'arc géométrique $\gamma$ est une relation entre le rayon de courbure $R$ et l 'abscisse curviligne $s$ en un point $M$ de $\gamma$ de la forme :

$$R = f(s).$$

Résoudre les équations intrinsèques suivantes :

1. $R = \frac{a^2+s^2}{a}$ ;
2. $R = \sqrt{a^2 - s^2}$

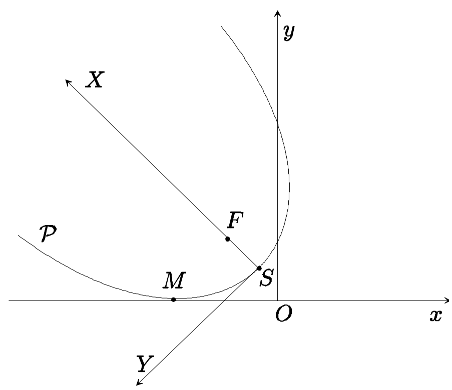
[On utilisera les relations $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R} = \frac{1}{f(s)}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\varphi$ et on reconnaîtra les courbes obtenues.]

**Exercice 4** *(parabole qui roule)*

La parabole $\mathcal{P} : Y^2 = 2pX$, de paramètre $p > 0$, roule sans glisser sur l'axe $Ox$.

Déterminer le lieu de son *foyer* $F$.

[On rappelle que le foyer d'une parabole est à une distance $\frac{p}{2}$ de son sommet : $\left\|\overrightarrow{SF}\right\| = \frac{p}{2}$.]




Pour cela, on paramètrera la parabole $\mathcal{P}$ par

$$M = F(t) = (X(t), Y(t)) = \left(\frac{pt^2}{2}, pt\right)$$

dans le repère "mobile" $\left(S ; \left(\vec{I}, \vec{J}\right)\right)$.

Il pourra être utile de compléter le schéma ci-dessus par les éléments métriques de la parabole $\mathcal{P}$ : orientation de $\mathcal{P}$, vecteur $\vec{t}$, angle $\varphi = (\widehat{\vec{I}, \vec{t}})$ notamment, avant de traduire le roulement et le non-glissement.