PCSI - exercices de mathématiques

Matrices

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $(\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ M(\alpha, \beta)$ est la matrice carrée d'ordre n :

$$M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

On pose $E = \{M(\alpha,\beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}\}$.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{K}$ev (sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et en donner une base et la dimension.

2. Démontrer que E est une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [On pourra utiliser l'ex. 1.]

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $A = (a_{i,j})$. On définit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i,\ \forall j,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0\}\ ; \\
\mathcal{N}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = 0\}\ ; \\
\mathcal{T}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid\ \mathrm{tr}(A) = \textstyle\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0\}\ ; \\
\mathcal{S}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i,\ \forall j,\ a_{i,j} = a_{j,i}\}\ ; \\
\mathcal{A}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i,\ \forall j,\ a_{i,j} = -a_{j,i}\}.
\end{aligned}$$

1. Reconnaître les matrices constituant ces ensembles.

2. Démontrer que $\mathcal{D}_n,\ \mathcal{N}_n,\ \mathcal{T}_n,\ \mathcal{S}_n,\ \mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour chacun d'eux, en donner une base et la dimension.

   [On utilisera la base canonique $\mathcal{E} = (E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.]

3. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n \oplus \mathcal{N}_n = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E} = (E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $X = (x_{i,j})$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}(X\,E_{k,l})$.

2. Démontrer que si $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a : $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$, alors : $A = B$.

3. Soit $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* = L_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

   Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une seule telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
   $$\varphi(X) = \mathrm{tr}(AX).$$

4. Soit $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ telle que quels que soient $X,\ Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\varphi(XY) = \varphi(YX)$.

   Démontrer qu'il existe un scalaire α tel que :
   $$\varphi = \alpha.\,\mathrm{tr}$$
   (càd : $\varphi(X) = \alpha.\,\mathrm{tr}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.)
   [On rappelle que le *centre*[1] de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\{\alpha I_n \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.]

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose f *nilpotent d'indice* p : $f^p = 0_{L(E)}$; $f^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ (où $p \in \mathbb{N}^*$). Si $x \in E$ est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ démontrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre dans E et en déduire que $p \leq n$.

2. On suppose que $p = n$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E.

1. Démontrer que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux bases de E, si $A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{U})$ et $B = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V})$: $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

   On peut donc définir la trace de f par : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A)$ où A est la matrice représentative de f dans une base (*quelconque*) de E.

[1] Càd, l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres pour $\times$.

2. Démontrer que pour toute forme n-linéaire alternée φ sur E, quels que soient $x_1, ..., x_n \in E$:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_1, ..., x_{i-1},\ f(x_i), x_{i+1}, ..., x_n) = \mathrm{tr}(f).\varphi(x_1, ..., x_n).$$

Exercice 7

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $(\in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}))$.

1. (a) Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$.
   (b) En déduire l'expression de M^2 en fonction de M et de I_3.
   (c) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites (u_n), (v_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que :
   - $M^n = u_n M + v_n I_3$;
   - $u_0 = 0$; $v_0 = 1$;
   - $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = \ \ 3u_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante. En déduire les expressions de u_n, v_n et M^n en fonction de n.

2. On se propose de calculer u_n et v_n par une autre méthode:

   (a) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Soit $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} en fonction de P.
   (c) Calculer $A' = P^{-1}AP$. Calculer A'^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire les expressions de A^n puis de u_n et v_n.

3. (Une autre méthode pour calculer M^n). On définit le polynôme $B = X^2 + 2X - 3$.

   (a) Factoriser B. Que vaut $B\,(M)$?
   (b) Déterminer le *reste* R de la division euclidienne de X^n par B.
   (c) En déduire M^n.

4. (a) M est-elle inversible ?
   (b) L'expression de M^n déterminée aux questions précédentes est-elle valable pour $n < 0$?

Exercice 8 *(théorème de* HADAMARD*)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *dominante sur les lignes* càd pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

Démontrer que A est inversible.
[*Indication* : il faut montrer que l'application $X \mapsto AX$ est bijective, càd injective. Etant donné X tel que $AX = 0$ on supposera par l'absurde $X \neq 0$ et on considérera l'indice $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (> 0) pour obtenir une contradiction.]
Que peut-on dire d'une matrice dominante sur les colonnes ?

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
Démontrer que A est semblable à une matrice à diagonale nulle[2].
[*Indication* : On pourra montrer dans un premier temps que A est semblable à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad A_1 \quad} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.]

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 29 & -7 & -3 \\ 46 & -8 & -6 \\ 39 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ définie par :
   $$\begin{cases} u_1 = \ \ e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ u_2 = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3 \\ u_3 = 3e_1 + 3e_2 + 2e_3 \end{cases}$$
   est une base de E.
2. Déterminer la matrice T de f dans cette base.
   Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que la matrice $N = T - \alpha I_3$ soit à diagonale nulle[2].
3. Calculer N^2 puis N^3.
   En déduire la valeur de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Quelle est la matrice de f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ dans la base $\mathcal{U}$?

[2] Càd, une matrice $N = (n_{i,j})$ dont dous les coefficients diagonaux $n_{i,i}$ sont nuls.