PCSI - exercices de mathématiques

Intégrale multiple

Exercice 1

Calculer l'intégrale $I = \int_D 2x\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine défini par : $x^4+y^4 \leq 1$. [*Réponse* : 0]

Exercice 2

Calculer le volume de la partie B de $\mathbb{R}^3$ délimitée par :
- le paraboloïde $\mathcal{P}$ d'équation $x^2+y^2 = 2pz$ $(p>0)$;
- le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2 = \lambda^2 z^2$ $(\lambda > 0)$.

[On fera une sommation par piles. *Réponse* : $\frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$]

Exercice 3

Calculer l'intégrale $I = \int_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine défini par les inégalités : $1 \leq x^2+y^2 \leq 2y$; $x \geq 0$.
[*Réponse* : $\sqrt{3} - \frac{\pi}{9}$]

Exercice 4

Calculer l'intégrale $I = \int_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine défini par : $\begin{cases} x^2+y^2-x \leq 0 \\ x^2+y^2-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. [*Réponse* : $\frac{3}{16}$]

Exercice 5

Calculer l'intégrale $I = \int_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est défini par les inégalités : $x^2+y^2 \leq 2ax$; $x^2+y^2 \leq 2ay$.
[On commencera par réduire le domaine d'intégration. *Réponse* : $a^4(\frac{3\pi}{4}-2)$]

Exercice 6

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine défini par les inégalités : $|x| \leq x^2+y^2 \leq 1$.
[Commencer par réduire le domaine d'intégration. *Réponse* : $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$]

Exercice 7

Calculer l'intégrale $I = \int_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur le domaine D : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$. [On fera un changement de variables "inspiré" du passage en polaires. *Réponse* : $\frac{\pi}{2}$]

Exercice 8

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; D étant défini par : $\varepsilon \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R$ $(\varepsilon,\, R \in \mathbb{R}_+^*)$.
[*Réponse* : $\frac{4\pi}{3-2\alpha}(R^{3-2\alpha} - \varepsilon^{3-2\alpha})$ si $\alpha \neq \frac{3}{2}$; $4\pi \ln \frac{R}{\varepsilon}$ si $\alpha = \frac{3}{2}$.]

Exercice 9

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+a^2)(z^2+a^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $(a > 0)$ où D est le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ x^2+y^2 \leq z^2 \end{cases}$. [*Réponse* : $\pi\left(\ln 2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$]

Exercice 10

Calculer l'intégrale $I = \int_D \left|x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où D est le domaine défini par : $x^2+y^2-z^2 \leq 0$, $0 \leq z \leq 1$.
[On commencera par réduire — beaucoup — le domaine d'intégration. *Réponse* : $\frac{1}{5}$]

Exercice 11

Calculer l'intégrale $I = \int_D \left(x^2-y^2\right)\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est le domaine défini par : $\begin{cases} 0 \leq x+y \leq 4 \\ xy \geq 1 \\ x \leq y \end{cases}$.
[On effectuera le changement de variables : $\begin{cases} x = u-v \\ y = u+v \end{cases}$.
Réponse : $2(\cos 4 - \cos 1 + 3\sin 1)$]

Exercice 12

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{xy}{(x+y)(1+xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ étendue au domaine $D = [0,1]^2$. [Après avoir réduit le domaine d'intégration, on effectuera le changement de variables : $\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$. *Réponse* : $2\ln 2 - \frac{\pi^2}{8}$]

Exercice 13

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{z^3}{(x+y+z)(y+z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ sur le domaine D : $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases}$. [On utilisera le changement de variables $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = \frac{z}{y+z} \\ w = \frac{y+z}{x+y+z} \end{cases}$. *Réponse* : $\frac{1}{64}$]

Exercice 14

Calculer l'intégrale $I = \int_D \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine défini par : $\begin{cases} x^2 - 2py \leq 0 \\ y^2 - 2qx \leq 0 \end{cases}$ $(p, q \in \mathbb{R}_+^*)$.
[On cherchera un changement de variables permettant de séparer I en deux intégrales simples — th. de Fubini. *Réponse* : $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{2p}-1)(\mathrm{e}^{2q}-1)$]

Exercice 15 *(technique du changement d'axes incomplet)*

Calculer l'intégrale $I = \int_B \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $((\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ où B est la boule unité de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
[Pour cela, on fera un changement de base *orthonormale* tel que la nouvelle coordonnée Z soit définie par : $Z = \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$, *sans expliciter* les nouvelles coordonnées X et Y. *Réponse* : $\frac{2\pi}{k^3}(\sin k - k\cos k)$ où $k = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$]