PCSI - exercices de mathématiques

Intégrale de Riemann

Fonctions intégrables

Exercice 1

Dans cet exercice, on demande d'utiliser le résultat suivant du cours sur l'intégrale, et seulement celui-là :

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si l'on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction en escalier e_n, dont une subdivision associée est $d_n = (x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ où $x_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n}$ par :

$$\begin{cases} e_n(t) & = f(x_{n,i}) \text{ pour tout } t \in]x_{n,i}, x_{n,i+1}[\\ & (\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!]) \\ e_n(t) & = f(t) \text{ si } t \in \{x_{n,0}, ..., x_{n,n}\} \end{cases}$$

on a : $\int_{[a,b]} f = \lim I(e_n)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; $t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^t$. Calculer $\int_{[a,b]} f$.

2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sigma_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + ... + n^p.$$

   (a) Démontrer que pour tout $p \geq 2$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)^{p+1} = (p+1)\,\sigma_p(n) + \sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{k}\,\sigma_k(n) + n + 1.$$

   [On développera $(i+1)^{p+1}$ pour $i = 1, ..., n$.]
   Calculer $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$, $\sigma_3(n)$.

   (b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $f_p : [0, b] \to \mathbb{R} \mapsto\ ;\ t^p$. Calculer $\int_{[0,\,b]} f_p$.

Exercice 2 *Une fonction non intégrable*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 1 \text{ si } t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b]. \end{cases} \end{array}$

1. Donner un minorant de $I(\psi - \varphi)$ si $\varphi, \psi \in \mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi \leq f \leq \psi$.

2. La fonction f est-elle intégrable sur $[a, b]$?

Exercice 3 *Lemme de* Lebesgue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application *intégrable* sur $[a, b]$.

Pour tout réel λ on pose :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t, \\ \gamma(\lambda) &= \int_{[a,b]} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t, \\ \delta(\lambda) &= \int_{[a,b]} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. On suppose que f est en escalier sur $[a, b]$. Démontrer que $\varphi(\lambda)$ admet pour limite 0 quand $\lambda \to +\infty$ et quand $\lambda \to -\infty$.
   [Commencer par le cas d'une fonction constante, puis utiliser une subdivision associée à f en escalier.]

2. On suppose maintenant f intégrable sur $[a, b]$. En utilisant la définition d'une fonction intégrable, démontrer que $\varphi(\lambda)$ admet pour limite 0 quand $\lambda \to +\infty$ et quand $\lambda \to -\infty$.

3. En déduire que $\gamma(\lambda)$ et $\delta(\lambda)$ admettent pour limite 0 quand $\lambda \to +\infty$ et quand $\lambda \to -\infty$.

Sommes de Riemann

Exercice 4 *sommes de* Riemann

A l'aide des sommes de Riemann, calculer les limites des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$; 2. $u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+k^2}$;

3. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$; 4. $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}$.

Exercice 5

1. Décomposer $X^{2n} - 1$ en produit de facteurs premiers dans $\mathbb{R}[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| \neq 1$.

   (a) Démontrer que $t \mapsto \varphi(t) = \alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1$ est continue sur $[0, \pi]$ et que : $\forall t \in [0, \pi]$, $\varphi(t) > 0$. Alors $t \mapsto \ln\varphi(t)$ est continue sur $[0, \pi]$ donc on peut poser : $J_\alpha = \int_{[0,\pi]} \ln(\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1)\,\mathrm{d}t$.

   (b) A l'aide des sommes de Riemann, calculer J_α. [On fera apparaître $\alpha^{2n} - 1$, que l'on exprimera à l'aide du 1., et on distinguera les cas $|\alpha| < 1$ et $|\alpha| > 1$.]

Exercice 6 *vitesse de CV des sommes de* RIEMANN

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et *soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *intégrable sur* $[a,b]$.

On pose : $R_n = \int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$. On a donc : $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ (sommes de RIEMANN).

Démontrer que :

1. Si $f \nearrow$ sur $[a,b]$, $0 \le R_n \le \frac{b-a}{n}\,(f(b)-f(a))$.
2. Si f est M-lipschitzienne sur $[a,b]$ ($M \in \mathbb{R}_+$), $|R_n| \le \frac{M(b-a)^2}{2n}$.
3. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}(n\,R_n) = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.
4. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $R_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\,[n \to \infty]$.
[*Indication* : On posera $F(x) = \int_a^x f$ pour tout $x \in [a,b]$. On pourra alors écrire que $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_{n,k}$ où
$$\begin{aligned} R_{n,k} &= \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f - \tfrac{b-a}{n}\, f(x_{n,k}) \\ &= F(x_{n,k+1}) - F(x_{n,k}) - \tfrac{b-a}{n}\, f(x_{n,k}) \end{aligned}$$
si $x_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n}$, ou encore
$$R_{n,k} = \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} (f(t) - f(x_{n,k}))\,\mathrm{d}t$$
puisque $x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{b-a}{n}$.]

Majoration d'intégrales

Exercice 7

Soient $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $f \in \mathrm{Int}([0,b],\mathbb{R})$. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$u_n = \int_0^b \frac{f(t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t.$$
Etudier la limite de la suite (u_n).
[On majorera $|u_n|$ en utilisant le fait que f est bornée.]

Exercice 8

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$. (On ne cherchera pas à “calculer” I_n).

1. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Déterminer un réel $a > 0$ tel que : $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a}{n}$.
[*Indication* : a est donc la limite éventuelle de $n\,I_n$. On partira de cette dernière quantité dans laquelle on effectuera une IPP judicieuse.]

Exercice 9

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue on pose
$$u_n(f) = n\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n(f)$ dans les cas suivants :
(a) $f(t) = k$; (b) $f(t) = t$; (c) $f(t) = 1-t$.
2. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} u_n(f)$:
(a) lorsque $f(1) = 0$
[On combinera la définition de la continuité de f avec un fractionnement judicieux de l'intervalle d'intégration] ;
(b) dans le cas général.
[On utilisera la linéarité de l'intégrale et la relation : $f(x) = f(1) + (f(x) - f(1))$.]
3. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, retrouver plus simplement ce résultat à l'aide d'une IPP.

Exercice 10 *La constante* γ *d'*EULER.

A. I est un intervalle de $\mathbb{R}$; $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I, a, $b \in I$ et $a \neq b$.

1. On définit A par :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}(f(a)+f(b)) + A(b-a)^3.$$
Pour tout $x \in I$ on pose :
$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x-a}{2}(f(a)+f(x)) - A(x-a)^3.$$
Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Démontrer qu'il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{f''(c)}{12}(b-a)^3.$$

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
(a) Déduire du **A.** que si $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right).$$
(b) Démontrer que $u_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$. On pose $\gamma = \lim u_n$ ([1]).
2. Si $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ la partie entière de x. On définit l'application h de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t} - E(\frac{1}{t}) & \text{si } t \in\ ]0,1]. \end{cases}$$
(a) Démontrer que h est intégrable sur $[0,1]$.
(b) Calculer $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de γ.

[1] Le nombre γ est la “constante d'EULER”, et vaut environ 0,577 215 664 901 532 860 606 512... Après plus de deux siècles de recherches, on ne sait toujours pas si γ appartient à $\mathbb{Q}$ où à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$...

Exercice 11 *L'irrationalité de π*

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\deg P \leq m$. Démontrer qu'il existe des nombres r_0, ..., r_m, s_0, ..., s_m appartenant à $\{-1, 0, 1\}$ tels que :
$$\int_0^\pi P(t)\sin t \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m} \left[r_i P^{(i)}(\pi) + s_i P^{(i)}(0) \right].$$
[On pourra effectuer une IPPG.]

2. Soient a, $b \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n \text{ et } I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t \, \mathrm{d}t.$$
   (a) Constater que $t \mapsto t(bt - a)$ est bornée sur $[0, \pi]$, et en déduire que : $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(i)}(\frac{a}{b}) \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. [Commencer par $P_n^{(i)}(0)$ et utiliser Taylor-polynômes.]
   (c) On suppose que : $\pi = \frac{a}{b}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{Z}$ et : $I_n \neq 0$.
   (d) Conclure que : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12 *cas d'égalité dans* $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1. Trouver une CNS sur $f[a, b] \to \mathbb{R}$ *continue* pour que : $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.
2. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que $x\cos\theta + y\sin\theta \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ avec égalité *ssi* il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $\binom{x}{y} = \lambda \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$.
   (b) Trouver une CNS sur $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continue* pour que : $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. [On introduira un argument θ du complexe $I = \int_a^b f$ et on écrira $|I| = I\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.]

Exercice 13 (*"justification" de la notation* $\|\cdot\|_\infty$)

Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue* et *positive* sur $[a, b]$. Si $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$ on pose :
$$u_p = \left(\int_a^b f^p(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Démontrer que : $\lim_{p\to\infty} u_p = \|f\|_\infty$.
[On encadrera u_p. Pour le minorer, on utilisera $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \|f\|_\infty$ et on appliquera la continuité de f en c pour minorer f par $\|f\|_\infty - \varepsilon$ sur $]c - \alpha, c + \alpha[$.]

I.p.p., changements de variables

Exercice 14 *Intégrations par parties*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^x \arctan t \, \mathrm{d}t$ $(x \in \mathbb{R})$;
2. $\int_0^x \arcsin t \, \mathrm{d}t$ $(x \in \ ]-1, 1[)$;
3. $F_n(x) = \int_1^x \ln^n t \, \mathrm{d}t$ $(n \in \mathbb{N}, x \in \ ]0, +\infty[)$;
4. $\int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t$ $(x \in \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.

Exercice 15

Si $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$T_n(x) = \int_0^x \tan^n t \, \mathrm{d}t$$
pour tout $x \in \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $T_{n+2}(x)$ et $T_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ [effectuer une IPP].
3. En déduire $T_{2p}(x)$ et $T_{2p+1}(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on pose pour tout réel x :
$$A_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)^n} \, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $A_1(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $A_n(x)$ et $A_{n+1}(x)$.
   [Faire une intégration par parties dans $A_n(x)$.]
3. Calculer $A_n(x)$ pour $n = 1$, 2, 3, 4.

Exercice 17

Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0, a]$ (où $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$).
Si $h \in \ ]0, a]$ on pose : $\varphi(h) = \int_0^h \frac{h}{h^2 + t^2} f(t) \, \mathrm{d}t$.
Déterminer $\lim_{h\to 0^+} \varphi(h)$.
[On traitera le cas $f = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, puis on transformera $\varphi(h)$ par changement de variable pour "deviner" le résultat et on conclura par linéarité de l'intégrale, *cf.* ex. 9.]

Exercice 18

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue.
   Déterminer $\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f(x^n) \, \mathrm{d}x \right)$.
   [On effectuera le changement de variable "évident" après l'avoir soigneusement justifié.]
2. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} \, \mathrm{d}x$. Déterminer un réel a tel que : $u_n = \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$ $[n \to \infty]$.
   [On montrera $\lim u_n = 0$ grâce au 1. et on calculera $a = \lim (n\, u_n)$ à l'aide d'une IPP judicieuse (*cf.* ex. 8) et à nouveau du 1.]

Exercice 19

Soit F l'ensemble des applications f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (où $a < b$) *continues* sur $[a, b]$ et *qui ne s'annulent pas* sur $[a, b]$.
Si $f \in F$ on pose $\varphi(f) = \left(\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} \, \mathrm{d}t \right)$.
Déterminer le minimum de $\varphi(f)$ lorsque f décrit F, et déterminer les fonctions f pour lesquelles ce minimum est atteint.
[On utilisera l'inégalité de Schwarz.]