PCSI - exercices de mathématiques

Géométrie du plan

Dans les exercices, $\mathcal{P}$ désigne le plan affine réel.

1 Notions affines

Exercice 1 *modes de représentation d'une droite*

On donne les cinq droites $\mathcal{D}_i$ suivantes. Pour chacune d'elles, donner les quatre autres modes de représentation.

- $\mathcal{D}_1 = (AB)$ où $A_1 = (3,7)$ et $B_1 = (-1,5)$;
- $\mathcal{D}_2 = A_2 + \langle \vec{u}_2 \rangle$ où $A_2 = (0,4)$ et $\vec{u}_2 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$;
- $\mathcal{D}_3 = \{(x,y) \in \mathcal{P} \mid x = -3 + 4\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathcal{D}_4 = \{(x,y) \in \mathcal{P} \mid 5x - 2y = 2\}$;
- $\mathcal{D}_5 = \left\{O + r\,\vec{u}\,(\theta) \ \mid r = \frac{6}{2\cos\theta + 3\sin\theta}\right\}$.

Exercice 2

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ non nuls. On considère les points du plan définis par $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$.

Démontrer qu'une équation de (AB) est : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Exercice 3 *changement de repère*

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$. On étudie l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de $\mathcal{P}$ vérifiant

$$x^2 + xy - 2y^2 - 4x - 2y + 4 = 0. \qquad (1)$$

1. Déterminer le point A d'intersection de $\mathcal{D}$ et Ox et les points B et C d'intersection de $\mathcal{D}$ et Oy.
2. Si $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in \mathcal{P}$, déterminer les relations vérifiées par les coordonnées x' et y' de M dans le repère $\mathcal{R}' = \left(A\ ;\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$.
3. Comment se traduit sur x' et y' l'équation (1) vérifiée par les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$?
   En déduire la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{D}$.

Exercice 4 *faisceaux de droites*

Soient deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $f_1(M) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $f_2(M) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$. On suppose $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en $A \in \mathcal{P}$.

1. Démontrer que l'équation d'une droite passant par A est de la forme $\lambda f_1(M) + \mu f_2(M) = 0$, λ et μ étant deux réels non tous deux nuls.
2. *Application.* $\mathcal{D}_1 \mid 2x + 3y = -1$, $\mathcal{D}_2 \mid 3y + 5x = -1$. Déterminer la droite $\mathcal{D}$ du faisceau $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ contenant $M = (2,3)$.

Exercice 5

A, B, C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

On considère des points A' sur (BC), B' sur (CA) et C' sur (AB). On note P, Q et R les milieux respectifs de $[A,A']$, $[B,B']$ et $[C,C']$.

Démontrer que P, Q et R sont alignés *ssi* A', B' et C' le sont.

Exercice 6

A et B sont deux points distincts de $\mathcal{P}$. On définit une suite de points (M_n) en posant $M_0 = A$, $M_1 = B$ et de proche en proche $M_{n+2} =$ milieu de $[M_{n+1}, M_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $M_n \in (AB)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier le comportement de la suite de points (M_n).

Exercice 7

A, B et C sont des points non alignés de $\mathcal{P}$.

1. M est un point fixé dans $\mathcal{P}$. On note P (*resp.* Q, R) le milieu de $[B,C]$ (*resp.* $[C,A]$, $[A,B]$). On note A' (*resp.* B', C') le symétrique de M par rapport au point P (*resp.* Q, R). Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles.
2. Soit $\vec{u} \in P$, $\vec{u} \neq \vec{0}$. On suppose que $\vec{u}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{AB}$, ni à $\overrightarrow{BC}$, ni à $\overrightarrow{CA}$. On note $\mathcal{D}_A$ (*resp.* $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$) la droite passant par A (*resp.* B, C) et dirigée par $\vec{u}$. La droite $\mathcal{D}_A$ (*resp.* $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$) coupe (BC) (*resp.* (CA), (AB)) en A' (*resp.* B', C')). On suppose défini le point noté P (*resp.* Q, R) d'intersection de (BC) et $(B'C')$ (*resp.* (CA) et $(C'A')$, (AB) et $(A'B')$). Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 8

On fixe A, B, $C \in \mathcal{P}$, A, B, C non alignés. $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$ qui n'est parallèle à aucune des trois droites (BC), (CA) et (AB), et $\mathcal{D}$ rencontre (BC) (*resp.* (CA), (AB)) en P (*resp.* Q, R).

1. On note U (*resp.* V, W) le milieu de $[A,P]$ (*resp.* $[B,Q]$, $[C,R]$). Démontrer que les points U, V et W sont alignés.
2. Par le point P on mène les parallèles à (AB) et à (AC) qui coupent en Q_1 et en R_1 respectivement la parallèle à (BC) passant par A. Démontrer que les droites (QQ_1) et (RR_1) sont parallèles.

Exercice 9 *théorèmes de* Menelaüs *et* Ceva

On appelle *mesure algébrique* de (A, B), et on note $\overline{AB}$, la différence $x_B - x_A$ des abscisses de A et B dans un repère quelconque d'une droite $\mathcal{D}$ contenant A et B. Ce n'est pas une définition intrinsèque, mais le *rapport* des mesures algébriques de deux couples de points situés sur $\mathcal{D}$ ne dépend que de ces 4 points.

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$.

1. Démontrer que A', B' et C' sont alignés *ssi*
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$
(théorème de Menelaüs).

2. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes *ssi*
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$
(théorème de Ceva).

2 Notions métriques

Exercice 10

Déterminer les bissectrices des droites de $\mathcal{P}$:
$$\mathcal{D}_1 \,|\, 2x + y - 3 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 \,|\, x + 4y + 1 = 0.$$

Exercice 11

Soient les droites $\mathcal{D}_1 \mid 5x+y-5 = 0$ et $\mathcal{D}_2 \mid 3x+y-4 = 0$.
Déterminer le lieu des points M de $\mathcal{P}$ tels que
$$d\,(M \;;\; \mathcal{D}_2) = 2d\,(M \;;\; \mathcal{D}_1)\,.$$

Exercice 12

Soient $A = (-4, -1)$, $B = (-2, 4)$ et $C = (1, -3)$ trois points du plan $\mathcal{P}$.

1. Que peut-on dire du triangle (A, B, C) ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

Exercice 13

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 les solutions de l'équation
$$t^3 - 3t + \lambda\left(1 - 3t^2\right) = 0, \qquad (2)$$
λ étant un paramètre réel fixé.

On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ de $\mathcal{P}$ d'équations
$$\mathcal{D}_i \mid \lambda_i^2 x - \lambda_i y + \frac{a}{2} = 0$$
où a est fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que ces trois droites sont sécantes en les sommets d'un triangle équilatéral.

[*Indication* : on posera $\alpha = \arctan\lambda$ et $\theta = \arctan t$ afin de simplifier l'expression des solutions de (1).]

Exercice 14

Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer le lieu des points M de $\mathcal{P}$ tels que

1. $MA^2 - MB^2 = k$;
2. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Exercice 15

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (-1, 2)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + 2y = 0$.

Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à $\mathcal{D}$.

Exercice 16

On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^2 + y^2 = 100$ et $\mathcal{C}_2$ d'équation $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

Démontrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents. Déterminer une équation de la tangente au point de contact. Préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.

Exercice 17

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2y + \frac{4}{5} = 0$ et le point $A = (3, 2)$.

1. Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

Exercice 18

Soient trois points A, B et C formant un triangle équilatéral.

Déterminer le lieu des points M de $\mathcal{P}$ tels que
$$MA^2 + MB^2 = MC^2.$$

Exercice 19

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$.

Étudier le lieu des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MA = k\,MB$.

Exercice 20

Les coordonnées des points sont données dans un repère orthonormal de $\mathcal{P}$. On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs $\Omega_1 = (0, 1)$ et $\Omega_2 = (1, 0)$, et de rayons respectifs $\sqrt{2}$ et 1. On note A et B leurs points d'intersection.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).
2. Démontrer que l'équation d'un cercle passant par A et B est de la forme générale $\alpha\mathcal{E}_1 + \beta\mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1$ (*resp.* $\mathcal{E}_2$) est une équation de $\mathcal{C}_1$ (*resp.* $\mathcal{C}_2$), et α, β deux réels non tous deux nuls.
3. En déduire l'équation du cercle circonscrit au triangle (A, B, Ω_1).

Exercice 21

Soient A, B, C les sommets d'un triangle équilatéral de $\mathcal{P}$. Étant donné un point M quelconque dans $\mathcal{P}$, on désigne par P, Q et R les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB).

Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les trois droites (AB), (BQ) et (CR) soient bien définies et concourantes.

[*Indication* : on choisira un repère orthonormal bien adapté au triangle (A, B, C).]