PCSI - exercices de mathématiques

Géométrie de l'espace

Dans ces exercices, $\mathcal{E}$ désigne l'espace affine réel de dimension 3, équipé le cas échéant d'un repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}))$. E désigne l'espace vectoriel sous-jacent (ensemble des vecteurs).

1 Notions affines

Exercice 1

Soit $\mathcal{T} = (A, B, C, D)$ un *tétraèdre.* On note G son centre de gravité.

1. Démontrer que G est le milieu de $[M, N]$ où M (*resp.* N) est le milieu de $[A, B]$ (*resp.* $[C, D]$). Quelles autres relations du même type peut-on écrire ?
2. Démontrer que G est le barycentre de $((G', 3), (D, 1))$ où G' est le centre de gravité du triangle (A, B, C). Quelles relations similaires peut-on écrire ?

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur λ pour que les droites

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} x - 2z - 1 = 0 \\ y - \ \ z - 1 = 0 \end{array}\right. \quad \text{et } \mathcal{D}_\lambda\left\{\begin{array}{l} x + \ \ y + \ \ z = 2 \\ x - 2y + 2z = \lambda \end{array}\right.$$

soient coplanaires. Dans ce cas, donner une équation du plan $\mathcal{P}$ qui les contient.

Exercice 3

On donne les trois plans suivants :

$$\begin{array}{l|l} \mathcal{P}_1 & ax + y + z + 1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 & x + ay + z + a = 0 \\ \mathcal{P}_3 & x + y + az + b = 0 \end{array}$$

Déterminer les réels a et b pour que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ soit une droite $\mathcal{D}$.

Donner alors une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Déterminer la droite $\mathcal{D}$ parallèle à $\Delta \mid 2x = 3y = 6z$ et rencontrant

$$\mathcal{D}_1\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 4 \end{array}\right. \quad \text{et } \mathcal{D}_2\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = -4 \end{array}\right.$$

Exercice 5

On donne la droite $\mathcal{D}$ par une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \ \ 3 + \ \lambda \end{array}\right. \ ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point $A\,(0, -1, 4)$.

Exercice 6

Soient A, B, C trois points non alignés et P un point n'appartenant pas au plan (ABC). On note A' (*resp.* B', C') le symétrique de P par rapport au milieu de $[B, C]$ (*resp.* $[C, A]$, $[A, B]$).

Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 7

On fixe $\vec{u}$ dans E, $\vec{u} \neq \vec{0}$. Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$ dirigée par $\vec{u}$ et X, $Y \in \mathcal{D}$ on note $\overline{XY}$ le scalaire λ tel que $\overrightarrow{XY} = \lambda\vec{u}$.

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ des droites de $\mathcal{E}$ dirigées par $\vec{u}$ et *non coplanaires.* On fixe des points A et P sur $\mathcal{D}$ (avec $A \neq P$), B et Q sur $\mathcal{D}'$ (avec $B \neq Q$) et C et R sur $\mathcal{D}''$ (avec $C \neq R$).

On pose $s = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CR}}$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de E.
2. Démontrer que les plans (PBC), (QCA) et (RAB) ont une direction de droite en commun *ssi* $s = 0$.

   Si $s = 0$ que peut-on dire des plans (AQR), (BRP) et (CPQ) ?
3. On suppose $s \neq 0$. Démontrer que les plans (PBC), (QCA) et (RAB) on en commun un point S et un seul, et que les plans (AQR), (BRP) et (CPQ) on en commun un point T et un seul.

   Démontrer que la droite (ST) est dirigée par $\vec{u}$ et que si U (*resp.* V) est le point d'intersection de (ST) et du plan (ABC) (*resp.* (PQR)) on a : $\overline{US} = \overline{ST} = \overline{TV}$ et $\frac{3}{\overline{UV}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CR}}$.

2 Notions métriques

Exercice 8

Déterminer le projeté orthogonal du point $A\,(4, 8, 0)$ sur le plan

$$\mathcal{P} \mid x + 3y + 2z = 0.$$

Exercice 9

Déterminer une équation du plan de $\mathcal{E}$ médiateur de $A\,(0, 2, -1)$ et $B\,(4, 4, 3)$.

Exercice 10

Déterminer le symétrique de l'axe Oz par rapport au plan $P \mid x + 2y - z + 1 = 0$.

Exercice 11

Déterminer la distance du point $M(-1,-1,2) \in \mathcal{E}$:

(a) au plan $\mathcal{P} \mid 5x - 3y + z = 1$;

(b) à la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}' \mid y + 3z = 3$.

Exercice 12

Soient

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{c} 2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right. .$$

Déterminer (un système d'équations de) la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Préciser ses intersections avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ainsi que la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$.

Exercice 13

Même exercice avec :

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z &= 2 \\ 2x - y \qquad &= 2 \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ y - z = 3 \end{array} \right. .$$

Exercice 14

Soient a, u, $v \in \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = u\,x + a \end{array} \right. ; \mathcal{D}' \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = v\,y - a \end{array} \right. .$$

1. Déterminer la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2. Déterminer la perpendiculaire commune Δ' à Δ et Oz.

3. Déterminer l'ensemble des intersections de Δ et Δ'.

Exercice 15

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et les deux droites :

$$\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{l} y - \ \ z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right. ; \mathcal{D}' \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + \ \ z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - \ \ 7 = 0 \end{array} \right. .$$

1. Déterminer une CNS sur a et b pour que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient sécantes. Donner alors un équation du plan qui les contient.

2. Démontrer que lorsque a varie, la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ reste dans un plan fixe.

Exercice 16

Soient m, $h \in \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{l} y = mx \\ z = h \end{array} \right. ; \mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{l} y = -mx \\ z = -h \end{array} \right. .$$

1. Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. Déterminer la réunion des droites $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}_1$, $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}_2$.

Exercice 17

Déterminer le lieu des projections orthogonales de l'origine sur les plans

$$\mathcal{P}_{\lambda,\mu} \mid x + \lambda y + \mu z = 1$$

lorsque λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Le repère $\mathcal{R}$ est supposé orthonormal. Si $t \in \mathbb{R}$ on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t + \sqrt{3} \sin t \\ y(t) = \cos t - \sqrt{3} \sin t + 1 \\ z(t) = -2 \cos t + 1 \end{array} \right.$$

Démontrer que $M(t)$ reste sur un cercle $\mathcal{C}$. Préciser le plan qui le contient, son centre et son rayon.

Exercice 19

1. Soient quatre points A, B, C, D *non coplanaires*. Montrer qu'il existe une unique sphère qui les contient (*sphère circonscrite* au tétraèdre (A, B, C, D)).

2. Le repère $\mathcal{R}$ est supposé orthonormal. On donne $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ où a, b, $c \in \mathbb{R}^*$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle (A, B, C).
[*Indication* : utiliser le 1. avec $D = O$.]

Exercice 20

$\|.\|$ désignant la norme euclidienne sur E, démontrer que l'on a pour tous $\vec{u}$, $\vec{v} \in E$:

$$2 + \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq 2 \left(1 + \|\vec{u}\|^2\right) \left(1 + \|\vec{v}\|^2\right).$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

Exercice 21

On considère 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de E.
On suppose que : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$; $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$; $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.
Que peut-on dire de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

Exercice 22

On considère une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E.
Que peut-on dire de la famille $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$?

Exercice 23

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$. Déterminer le lieu des points $M \in \mathcal{E}$ tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\right) = k$$

où k est un réel fixé.